основе кватернионной 4D геометрической конфигурации [2].

Для мониторинга и прогнозирования сильных землетрясений эта гипотеза может сыграть продуктивную миссию.

Список литературы

1. Мирмович Э.Г., Лев Ф.М. Некоторые аспекты Де-Ситтер-инвариантной динамики / Деп. в ВИНИТИ № 6099-84. 06.09.84 г. Хабаровск: СВ КНИИ ДВНЦ АН СССР. 1984. – 33 с. (цит. Lev F.M. and Mirmovich E.G., VINITI No 6099 Dep.; Lev F.M. A possible mechanism of gravity Artwork Conversion Software Inc., 1201 Morningside Drive, Manhattan Beach, CA 90266, USA. arXiv:hep-th/0307087 v1 9 Jul 2003).

2. Мирмович Э.Г., Усачёва Т.В. Алгебра кватернионов и вращения в трехмерном пространстве // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. № 1, 2009. – С. 75–80.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЧАСОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Козьменко Ю.Г., Потетюнко Э.Н.

Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, Россия

1. Решена обратная спектральная задача о свободных колебаниях стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска с граничным условием типа «твердой крышки» [1] в безразмерных переменных [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2W}{dz^2} + \dfrac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) = 0, \\ W(0) = 0, W(1) = 0,\ f^2 < \omega^2 < \max\limits_{z\in[0,1]} \mu(z) \end{cases}. \qquad (1)$$

Здесь $\mu(z)$ - квадрат безразмерной частоты плавучести (частоты Вяйсяля-Брента).

Ставится задача: по известным зависимостям $k_n(\omega)$ (дисперсионным кривым) в краевой задаче (1) определить (восстановить) функцию $\mu(z)$.

2. Пусть $\mu(z)$ - квадратичная функция, симметричная относительно середины отрезка [0,1]:

$$\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z - \mu_1 z^2 .$$

Считая известными значения коэффициентов μ_0, μ_1, построим функциональную зависимость ω от k. Возьмем $\mu_0 = 0.01,\ \ \mu_1 = 1,\ \ \mu_2 = -1.$

Сведем уравнение в (1) к следующему виду:

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) W = 0 . \qquad (2)$$

В этом случае решение строится через функции параболического цилиндра [3]:

$$W = C_1 D_p(\xi) + C_2 D_p(-\xi)$$

$$D_p(\xi) = 2^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{p}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\xi^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{2\pi}\xi}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-p}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\xi^2}{2} \right) \right\}. \qquad (3)$$

Здесь $\Gamma(z)$- гамма – функция [3], Φ - вырожденная гипергеометрическая функция [3]:

$$\Phi(\alpha, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c-\alpha)} \int_0^1 e^{xu} u^{\alpha-1} (1-u)^{c-\alpha-1} du,$$

$$\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots \quad (4)$$

Чтобы получить решение в таком виде в дифференциальном уравнении краевой задачи (1) нужно сделать следующую замену переменной:

$$\xi = \sqrt[4]{4\lambda\mu_1}\left(z - \frac{1}{2}\right), \ p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}}\left(\mu_0 + \frac{\mu_1}{4} - \omega^2\right), \ \lambda = \frac{k^2}{\omega^2 - f^2}.$$

Граничные условия примут вид:

$$W(\xi_1) = 0, \ W(\xi_2) = 0, \ \xi_1 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{4a}, \ \xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{4a}, \ a = \lambda\mu_1.$$

Удовлетворяя граничным условиям, приходим к системе двух однородных уравнений:

$$C_1 D_p(\xi_1) + C_2 D_p(-\xi_1) = 0$$
$$C_1 D_p(\xi_2) + C_2 D_p(-\xi_2) = 0$$

Приравненный нулю определитель этой системы даёт частотное уравнение:

$$\psi(k^2, \omega^2, \mu_0, \mu_1, \mu_2) \equiv D_p(\xi_1) D_p(-\xi_2) - D_p(-\xi_1) D_p(\xi_2) = 0. \quad (5)$$

С учётом того, что $\xi_2 = -\xi_1$, уравнение (5) рассыпается на два уравнения:

$$D_p(\xi_1) - D_p(\xi_2) = 0, \ D_p(\xi_1) + D_p(\xi_2) = 0. \quad (6)$$

С использованием формулы (3) имеем совокупность двух уравнений:

$$\Phi\left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\xi_2^2}{2}\right) = 0, \ \Phi\left(\frac{1-p}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\xi_2^2}{2}\right) = 0. \quad (7)$$

В цикле по ω от f^2 до $\max\limits_{z\in[0,1]} \mu(z)$, при заданных значениях ω, μ_0, μ_1, численно решаются уравнения (7) относительно k, входящего через a в ξ_2 и строятся графики дисперсионных кривых. Из счётного множества корней k_m отбираем M наименьших.

Минимизацией функционала $F = \sum\limits_{m=1}^{M} \psi^2(k_m^2, \omega^2, \mu_0, \mu_1)$ по μ_0, μ_1 при заданных ω и k, лежащих на разных дисперсионных кривых, решается обратная задача, то есть, определяются μ_0, μ_1 и тем самым - стратификация жидкости.

3. При слабой стратификации (малых значениях параметра $a = \lambda\mu_1$) из (7), после замены функций Φ их представлениями из (4), частотные уравнения представлены в виде рядов по параметрам p и a.

В прямой спектральной задаче, ограничиваясь в этих рядах конечным числом слагаемых, при заданных ω, μ_0 и μ_1 находим параметры

λ_m, а по нему - значения k_m и строим дисперсионные кривые.

В обратной задаче из этих же рядов, выписывая систему частотных уравнений для двух пар чисел ω и k, лежащих на разных дисперсионных кривых, определяем параметры стратификации μ_0 и μ_1. Впрочем, эти уравнения можно получить проще, отыскивая решение краевой задачи (1) в виде степенных рядов:

$$w = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \ldots + c_n z^n + \ldots \quad (8)$$

Подставляя (8) и полиномиальное представление $\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z - \mu_1 z^2$ в дифференциальное уравнение в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему уравнений относительно c_n. Выражая все c_n через $\tilde{n}_1$ и удовлетворяя граничным условиям в (1), получаем дисперсионное уравнение в виде ряда, первые слагаемые которого имеют вид:

$$1 - \frac{\lambda(\mu_0 - \omega^2)}{2 \cdot 3} - \frac{2\lambda\mu_1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\lambda^2(\mu_0 - \omega^2)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \lambda^2 \frac{(\mu_0 - \omega^2)\mu_1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots = 0\,. \quad (9)$$

Из (9) при заданных ω, μ_0 и μ_1 находим параметры λ_n, по ним значения k_n и строим дисперсионные кривые.

Для решения обратной задачи из (9) при двух парах чисел, лежащих на разных дисперсионных кривых, получаем систему двух уравнений относительно μ_0, μ_1. Решив эту систему, находим параметры стратификации μ_0, μ_1, а по ним – квадрат частоты плавучести.

4. При сильной стратификации (больших значениях параметра $a = \lambda\mu_1$) по асимптотическим формулам для функции параболического цилиндра [3] выводим асимптотическое частотное уравнение.

Впрочем, его проще получить из дифференциального уравнения в (1) с использованием метода ВКБ [4]. Согласно методу ВКБ, решение дифференциального уравнения в (1) при больших значениях величины k имеет следующий вид:

$$W = C_1\left[U(z,k)\sin\left(k\int_0^z \beta(z_1)dz_1\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] + C_2\left[U(z,k)\cos\left(k\int_0^z \beta(z_1)\right)dz_1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right], \quad (10)$$

$$U(z,k) = \frac{1}{\sqrt{k\beta(z)}}, \beta(z) = \sqrt{\frac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2}}, \ \frac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \succ 0, \ f^2 \angle \omega^2 \angle \min_{z\in[0,1]} \mu(z).$$

Удовлетворяя граничным условиям в (1), получаем дисперсионное уравнение:

$$k_n \int_0^1 \beta(z_1)dz_1 = n\pi\,,\ n = 1,2\ldots, \quad (11)$$

Считая в (11) известными коэффициенты μ_0, μ_1 в представлении функции $\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z - \mu_1 z^2$ и вычисляя интеграл по [3], строим дисперсионные кривые зависимостей $k_n(\omega)$.

Для решения обратной задачи по известным парам чисел (k_m, ω_m), лежащих на разных дисперсионных кривых, определяются параметры функции $\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z - \mu_1 z^2$ минимизацией функционала:

$$F = \sum_{m=1}^{M} \psi^2 \left(k_m, \omega_m, \mu_0, \mu_1\right),\ \psi\left(k, \omega, \mu_0, \mu_1\right) = k_m - \frac{m\pi}{\int_0^1 \beta(z_1) dz_1},\ m = 1,2... \qquad (12)$$

Исследована точность δ_1, δ_2, δ_3 восстановления функции $\mu(z)$ в пространствах C, L_1, L_2.

$$\delta_1 = \frac{\max\limits_{0\le z\le 1}\left|\mu(z) - \tilde{\mu}(z)\right|}{\max\limits_{0\le z\le 1}\left|\mu(z)\right|} 100\%,\quad \delta_2 = \frac{\int_0^1 \left|\mu(z) - \tilde{\mu}(z)\right| dz}{\int_0^1 \left|\mu(z)\right| dz} 100\%,$$

$$\delta_3 = \frac{\sqrt{\int_0^1 \left|\mu(z) - \tilde{\mu}(z)\right|^2 dz}}{\sqrt{\int_0^1 \left|\mu(z)\right|^2 dz}} 100\%.$$

Здесь $\tilde{\mu}(z)$- восстановленная функция $\mu(z)$ по численно найденным параметрам стратификации μ_0 и μ_1.

Проведена оценка точности ВКБ - асимптотики, а именно, показано, что разность между точным решением дифференциального уравнения в (1) и ВКБ – приближением меньше, чем $\frac{\tilde{N}}{k}$, $C = const$. Для конкретно заданных значений параметров задачи константа C найдена.

Список литературы

1. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 301 с.
2. Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В., Шубин Д.С., Щербак Е.Н. Свободные колебания и обратные спектральные задачи. Волновые движения неоднородной жидкости. 2-е изд.- М.: Вузовская книга, 2007 – 288 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
4. Н.Н. Моисеев Асимптотические методы нелинейной механики. Наука. Главная редакция физико-математической литературы. М.:, 1969 - 380 с.

АКСИОМА 8 ЕВКЛИДА И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ

Сухотин А.М.

Национальный Исследовательский Томский политехнический университет Томск, Россия

1. Бурное развитие и рост математического знания в средние века и в Новое время поставили в конце XIX – начале XX веков математическое сообщество перед необходимостью строгого обоснования анализа и всей математики. Однако и в начале XXI веков в этой области остались нерешённые или решённые не до конца проблемы. Некоторые из этих проблем связаны с понятием бесконечности в математики и были формально описаны ещё Галилео Галилеем в первой половине XVII века [1]. Известно, что в классическом анализе $\sum_1^\infty (1)^n = \infty$ и $\sum_1^\infty 1/n = \infty$, то есть символом ∞ бесконечность обозначено слишком многое. Это не позволяет адекватно использовать математические методы в областях знания и в моделях, имеющих неограниченные области изменений параметров, например в космологии.

Объектом нашего исследования являются инъективные отображения на множестве ***N***