УДК 539.19

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Тактаров Н.Г., Миронова С.М.

Мордовский государственный педагогический институт, Саранск

Построена и исследована математическая модель распространения волн на поверхности слоя электропроводной жидкости с поверхностным электрическим зарядом, находящейся на слое пористой среды.

Ключевые слова: поверхностные волны, слой, пористый, электропроводный, электрический заряд

Предполагается, что толщины слоев пористой среды проводящей жидкости равны h_1 и h_2 соответственно. Пористая среда ограничена снизу сплошным твердым электропроводным основанием (дном). Как известно [1], в случае электростатического равновесия заряды проводников сосредоточиваются только на их поверхности, а внутри проводника напряженность электрического поля $\overline{E} = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля будет отличаться от нуля лишь в атмосфере, находящейся над слоем жидкости. На поверхности проводника выполняется соотношение $E_n = 4\pi\sigma$, где $E_n = \overline{E} \cdot \overline{n}$, $\overline{n}$ - единичная внешняя (т. е. направленная из жидкости в атмосферу) нормаль к поверхности жидкости, σ - плотность поверхностного заряда, приходящаяся на единицу площади. Величины, относящиеся к пористой среде, жидкости и атмосфере обозначаются в необходимых случаях номерами 1, 2, 3 соответственно. Ось Oz декартовой системы координат Oxyz направлена вертикально вверх против вектора $\overline{g}$ ускорения свободного падения, а оси Ox и Oy лежат на плоской поверхности раздела жидкости и пористой среды.

Уравнения движения электропроводной жидкости в пористой среде при условии $\overline{E} = 0$ имеют вид [2]

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial t} = -gradp_1 + \rho\overline{g} - \frac{\eta}{K}\overline{u}_1, \quad div\overline{u}_1 = 0. \tag{1}$$

Здесь ρ - плотность жидкости, Γ - пористость среды, p_1 - давление, $\overline{u}_1$ - макроскопическая скорость фильтрации, η - вязкость, K - коэффициент проницаемости пористой среды, вычисляемый по формуле Козени [2].

Уравнения движения свободной жидкости при $\overline{E} = 0$ запишем в линейном приближении:

$$\rho\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial t} = -gradp_2 + \rho\overline{g}, \quad div\overline{u}_2 = 0, \tag{2}$$

где $\overline{u}_2$ - скорость жидкости.

Уравнения для электрического поля в атмосфере

$$rot\overline{E} = 0,\ div\overline{D} = 0\ (\overline{D} = \varepsilon\overline{E},\ \varepsilon = const). \quad (3)$$

Здесь ε - диэлектрическая проницаемость.

Из уравнений (2), (3) следует: $\overline{u}_2 = \nabla\varphi$, $\overline{E} = -grad\psi$, где φ и ψ потенциал скорости и электрического поля, удовлетворяющие уравнениям Лапласа

$$\Delta\varphi(x, y, z, t) = 0,\ \Delta\psi(x, y, x, t) = 0. \quad (4)$$

Система граничных условий на границах раздела:

1) $u_{1z} = 0$ при $z = -h_1$ (на дне),

2) $u_{1z} = u_{2z}$ при $z = 0$ (на границе пористой среды),

3) $p_1 = p_2$ при $z = 0$, на свободной поверхности жидкости с уравнением $z = h_2 + \xi(x, y, t)$,

4) $u_{2n} = V_n$,

5) $\overline{E}_\tau = \overline{E} - \overline{n}E_n = 0$ или $\psi = C_0 = const$,

6) $p_{ij}n_i n_j + p_2 = -\alpha(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, $p_{ij} = -p_{атм}\delta_{ij} + \frac{\varepsilon E_i E_j}{4\pi} - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\delta_{ij}$.

Здесь $V_n = \partial\xi / \partial t$ - нормальная скорость свободной жидкости, R_1, R_2 - радиусы кривизны поверхности, $p_{атм}$ - постоянное давление в атмосфере, p_{ij} - максвелловский тензор механических напряжений в области 3, α - коэффициент поверхностного натяжения. Величина σ находится из условия $\sigma = \varepsilon E_n / 4\pi$. В линейном приближении $\overline{n} = -\frac{\partial\xi}{\partial x}\overline{e}_1 - \frac{\partial\xi}{\partial y}\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ - базисные векторы системы координат Oxyz.

Переменные величины записываем в виде:

$$p_1 = p_{10} + p_{1w},\ p_2 = p_{20} + p_{2w},\ \varphi = \varphi_0 + \varphi_w,\ \psi = \psi_0 + \psi_w, \quad (6)$$
$$\overline{E} = \overline{E}_0 + \overline{E}_w\ (\overline{E}_w = -grad\psi_w),\ \sigma = \sigma_0 + \sigma_w.$$

Здесь индексом «0» отмечены невозмущенные величины, а индексом «w» - возмущения соответствующих величин, связанные с волновым движением.

В равенствах (6):

$$\overline{E}_0 = E_{0z}\overline{e}_3,\ \psi_0 = -E_{0z}z + C,\ \sigma_0 = \varepsilon E_{0z} / 4\pi,\ \sigma_w = \varepsilon E_{wz} / 4\pi. \quad (7)$$

Выбирая $C = C_0 + E_{0z}h_2$, условие 5) в системе (5), можно записать в виде: $-E_{0z}\xi + \psi_w = 0$. Из условия 6) системы (5) следует при $z = h_2 + \xi$:

$$-\frac{\varepsilon E_{0z}}{4\pi}\frac{\partial\psi_w}{\partial z} + p_{2w} = -\alpha\Delta_2\xi. \quad (8)$$

Здесь $\Delta_2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$. При выводе (8) учитывается, что

$$p_{02} = p_{атм} - \frac{\varepsilon E_{0z}^2}{2},$$

и

$$E_n = (\overline{E}_0 + \overline{E}_w)\cdot\overline{n} = E_{0z} - \frac{\partial\psi_w}{\partial z}$$

в линейном приближении.

В результате упрощения система (5) вместе с условием на бесконечности принимает вид:

$$1)\ u_{1z} = 0\ (z = -h_1),\quad 2)\ u_{1z} = u_{2z}\ (z = 0),\quad 3)\ p_{1w} = p_{2w}\ (z = 0),$$
$$4)\ u_{2z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\ (z = h_2 + \xi),\ 5)\ -E_{0z}\xi + \psi_w = 0\ (z = h_2 + \xi),\qquad (9)$$
$$6)\ -\frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\frac{\partial\psi_w}{\partial z} + p_{2w} = -\alpha\Delta_2\xi\ (z = h_2 + \xi),\quad 7)\ \psi_w = 0\ (z \to +\infty).$$

Здесь $p_{2w} = -\rho g\xi - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в условии 6). Все малые величины второго и более высоких порядков отбрасываются.

Из уравнений (1) следует

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial\Delta u_{1z}}{\partial t} = -\frac{\eta}{K}\Delta u_{1z}. \qquad (10)$$

В связи с тем, что при отсутствии волн: $0 = -\nabla p_{10} + \rho\overline{g}$, $0 = -\nabla p_{20} + \rho\overline{g}$, уравнения для возмущений принимают вид

$$1)\ \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial t} = -p_{1w} - \frac{\eta}{K}u_1,\ 2)\ \rho\frac{\partial\overline{u}_2}{\partial t} = \nabla p_{2w}. \qquad (11)$$

Из уравнения (2) системы (11) с учетом $div\overline{u}_2 = 0$ следует

$$\rho\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z} = \Delta_2 p_{2w}, \qquad (12)$$

а из уравнения 1) системы (11) с учетом $div\overline{u}_1 = 0$ находим

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z} + \frac{\eta}{K}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = \Delta_2 p_{1w}. \qquad (13)$$

С учетом (12) и (13) граничное условие 3) в системе (9) принимает вид

$3')$ $\rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z} = \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}$ (при $z = 0$).

С учетом (4) и (10) окончательно система трех уравнений для нахождения φ, ψ_w, u_{1z} принимает вид:

$$1)\ \Delta\varphi = 0,\quad 2)\ \Delta\psi_w = 0,\quad 3)\ \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \Delta u_{1z}}{\partial t} = -\frac{\eta}{K}\Delta u_{1z}. \qquad (14)$$

А граничные условия (9) с учетом $u_{2z} = \partial\varphi / \partial z$ окончательно запишется в виде:

$$1)\ u_{1z} = 0\ (z = -h_1),\quad 2)\ u_{2z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ (z = 0),$$

$$3)\ \rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z} = \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\ (z = 0),\quad 4)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\ (z = h_2),$$

$$5)\ -E_{0z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_w}{\partial t} = 0\ (z = h_2), \qquad (15)$$

$$6)\ -\frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial z \partial z} - \rho g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\alpha\Delta_2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ (z = h_2),$$

$$7)\ \psi_w = 0\ (z \to +\infty).$$

Решение уравнений (14) с граничными условиями (15) ищем в виде затухающих волн:

$$\varphi(x,y,z,t) = \Phi(z)\exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)],$$
$$\psi_w(x,y,z,t) = \Psi(z)\exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)], \qquad (16)$$
$$u_{1z}(x,y,z,t) = U(z)\exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)].$$

Здесь $\gamma = \beta + i\omega$, β - декремент затухания, ω - частота.

Подставляя функции (16) в уравнения (14), получим систему дифференциальных уравнений для амплитуд $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $U(z)$:

$$1)\ \Phi''(z) - k^2\Phi = 0,\quad 2)\ \Psi''(z) - k^2\Psi = 0,\quad 3)\ (\gamma - \frac{\eta\Gamma}{\rho K})[U'' - k^2 U] = 0. \qquad (17)$$

Здесь $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Граничные условия для амплитуд получаются из (15):

$$1)\ U = 0\ (z = -h_1),\quad 2)\ U = \Phi'\ (z = 0),\quad 3)\ (\frac{\rho}{\Gamma}\gamma - \frac{\eta}{K})U' = \rho\gamma\Phi''\ (z = 0),$$

4) $\xi = \int \frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=h_2} dt$ (уравнение для нахождения функции $\xi(x,y,t)$), (18)

5) $E_{0z}\Phi' + \gamma\Psi = 0$ ($z = h_2$), $\rho[g\Phi' + \gamma^2\Phi] - \frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\gamma\Psi' + \alpha k^2\Phi' = 0$ ($z = h_2$),

7) $\psi_w = 0$ ($z \to +\infty$).

Общее решение системы (18) имеет вид:

$$\Phi = C_1\exp(-kz) + C_2\exp(kz),$$
$$\Psi = C_3\exp(-kz) + C_4\exp(kz), \qquad (19)$$
$$U = C_5\exp(-kz) + C_6\exp(kz),$$

где C_i ($i = 1,...,6$) – произвольные постоянные.

Подставляя формулы (19) в условия (18), получим однородную систему линейных относительно постоянных C_i алгебраических уравнений, которая имеет ненулевое решение только при обращении в нуль определителя системы. Из этого условия получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн:

$$\gamma^3\rho^2(a_1b_1 + \frac{a_2b_2}{\Gamma}) - \gamma^2\frac{\eta}{K}\rho a_2b_2 - \gamma\rho(a_2b_1 + \frac{a_1b_2}{\Gamma})G + \frac{\eta}{K}a_1b_2G = 0,$$

где $a_1 = 1 - \exp(2kh_2)$, $a_2 = 1 + \exp(2kh_2)$, $b_1 = 1 - \exp(2kh_1)$, $b_2 = 1 + \exp(2kh_1)$,

$G = k\rho g + k^3\alpha - \frac{\varepsilon E_0^2 k^2}{4\pi}$ ($E_0 = |E_{0z}|$).

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) $h_1/\lambda << 1$, $h_2/\lambda << 1$;

2) $h_1/\lambda >> 1$, $h_2/\lambda << 1$;

3) h_1 - произвольное, $h_2/\lambda << 1$.

Конкретные числовые расчеты велись для жидкого натрия при температуре $100^\circ C$ с параметрами: $\rho = 0{,}93$ $г/см^3$, $\alpha = 206{,}4$ $дин/см$, $\eta = 0{,}69$ $\frac{г}{см \cdot с}$. Значения E брались в промежутке от 0до 50 ед. СГС (1 ед. СГС = 300 $В/см$). Принимаем, что ε =1 в атмосфере.

Остановимся подробнее на первом случае. Здесь частота $\omega > 0$ уменьшается с увеличением длины волны λ и слабо зависит от толщины h_1, но с ростом h_2 значения ω увеличиваются (при $\lambda = const$); декремент $\beta > 0$ также уменьшается с ростом λ, при этом с ростом h_1 величина β увеличивается (при $\lambda = const$), а с ростом h_2 - уменьшается (при $\lambda = const$).

С ростом E_0 значения ω уменьшаются при заданных λ, h_1, h_2. При этом изменение h_1 практически не влияет на

ω, при увеличении h_2 значения ω увеличиваются (при заданных λ, h_1).

С увеличением E_0 значения β уменьшаются при заданных λ, h_1, h_2. При увеличении h_1 значения β увеличиваются. При увеличении h_2 значения β уменьшаются.

При увеличении Γ значения ω монотонно увеличиваются до максимального значения $\omega_{\max} \approx 1{,}24$ (при $\Gamma \to 1$), при этом с ростом h_1, а также h_2 величина ω возрастает; значения β вначале возрастают практически от нуля до максимального значения $\beta_{\max} \approx 0{,}2$ (при $\Gamma = 0{,}91$), а затем монотонно убывают, стремясь к нулю (при заданных $h_1 = h_2 = 25$ $см$, $k = 0{,}006$ $см^{-1}$), при этом с ростом h_1 значения β увеличиваются, а при росте h_2 - уменьшаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. – 616 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. – 392 с.

THE MATHEMATICAL MODELLING OF SURFACE WAVES IN LAYER OF ELECTROCONDUCTIVE FLUID ON POROUS BED IN ELECTRIC FIELD

Taktarov N.G., Mironova S.M.
Mordovian state pedagogical institute, Saransk

The mathematical model of surface waves in layer of electroconductive fluid with surface electrical charge on porous bed had been constructed and analysed.

Keywords: surface waves, layer, porous, electroconductive, electrical charge