тически неопределимой балки; свободное кручение тонкостенного стержня; стесненное кручение тонкостенного упругого стержня; определение критической силы сжатого стержня; усталость металлов.

Описание всех лабораторных работ выполнено по единой форме: цель работы; описание испытательной машины или лабораторной установки; порядок проведения испытания; обработка результатов испытаний; контрольные вопросы.

Данное пособие опубликовано в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов: http:window.edu.ru/window/library (Свидетельство о публикации Рег. № 04-06/1077, 2006г.).

После апробации учебного пособия со студентами дневного и заочного отделений нами была начата работа по созданию виртуальных лабораторных работ по курсу «Сопротивление материалов». К настоящему времени подготовлены и используются в учебном процессе 9 виртуальных лабораторных. Компьютерные программы имитирующие проведение лабораторных работ за счет использования генератора случайных чисел и специальных фильтров позволяют студенту получать экспериментальные данные с реальными отклонениями от расчетных значений. Более того, при исследовании, например, балки на изгиб, работа может проводится, как на лабораторной установки, так и на объекте имеющим реальные размеры. Для студентов дневного и заочного отделений проводятся лабораторные работы на реальных установках, а экспериментальные данные каждый студент получает индивидуально в процессе проведения виртуального эксперимента. Таким образом, каждый студент должен самостоятельно обработать результаты эксперимента и сделать соответствующие выводы. Студенты (слушатели), которые проходят обучение по системе дистанционного образования самостоятельно готовятся и проводят виртуальные лабораторные работы используя интернет ресурсы университета. Практика показала, что использование виртуальных лабораторных работ позволяет студенту лучше усвоить изучаемый материал и познакомиться с особенностями напряженно-деформированного состояния реальных конструкций при различных видах нагружения.

Работа представлена на Международную научную конференцию «Актуальные вопросы науки и образования», Москва, 11-13 мая 2010. Поступила в редакцию 28.04.2010.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ГЛАДКОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Митрохин С.И.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y^{(3)}(x) = \lambda \cdot a^3 \cdot \rho^3(x) \cdot y(x),$$
$$0 \le x \le \pi,\ a > 0,\ \rho(x) > 0. \qquad (1)$$

где λ — спектральный параметр, функция $\rho(x)$ называется ***весовой функцией***, функция $q(x)$ называется потенциалом.

Для изучения асимптотики собственных значений и собственных функций краевых задач, связанных с дифференциальным уравнением (1), необходимо знать асимптотику решений дифференциального уравнения (1).

Пусть $\lambda = s^3$, $s = \sqrt[3]{\lambda}$ — некоторая фиксированная ветвь корня, выбранная условием $\sqrt[3]{1} = +1$. Пусть ω_k — корни третьей степени из единицы, то есть $\omega_k^3 = 1, \omega_k = \sqrt[3]{1} = e^{\frac{2\pi i(k-1)}{3}}$; $k = 1, 2, 3$; $\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

Эти числа удовлетворяют следующим свойствам: $\sum_{k=1}^{3} \omega_k^m = 0,\ m = 1,2.$ Будем предполагать, что $\rho(x) \in C^3[0;\pi]$. Потенциал $q(x)$ — суммируемая функция:

$$\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \textit{ почти всюду на отрезке } 0;\pi].\qquad (2)$$

Для нахождения асимптотики решений дифференциального уравнения (1) при выполнении условия гладкости (2) сначала рассмотрим вспомогательное уравнение

$$y^{(3)}(x) = \lambda \cdot a^3 \cdot \rho^3(x) \cdot y(x),$$
$$0 \le x \le \pi,\ a > 0,\ \rho(x) > 0. \qquad (3)$$

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (3) имеет следующий вид:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot y_k(x,s),$$
$$y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot y_k^{(m)}(x,s), m = 1,2, \qquad (4)$$

где C_k ($k = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные, $y_k(x, s)$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения (3), причём при |s|→+∞ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$y_k(x,s)=\rho^{-1}(x)\cdot e^{a\omega_k s\cdot M(t)}\cdot\left[1+\frac{A_{1k3}(x)}{s}+\frac{A_{2k3}(x)}{s^2}+\frac{A_{3k3}(x)}{s^3}+\ldots\right],\ k=1,\,2,\,3. \quad (5)$$

Идею разложения вида (5) мы нашли в монографии М.В. Федорюка [1].

В формуле (5) введено следующее обозначение: $M(x)=\int\limits_0^x \rho(t)dt$.

Продифференцируем асимптотические разложения вида (5) почленно три раза, для этого достаточно выполнения условия гладкости $\rho(x)\in C^3\,[0;\pi]$, и подставим получившиеся формулы в дифференциальное уравнение (3), приведём подобные слагаемые и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s (этот метод называется методом последовательных приближений Хорна). При этом найдём в явном виде коэффициенты $A_{1k3}(x)$, $A_{2k3}(x)$, …. Это не было сделано ни в монографии [1], ни в других работах.

Впервые это было сделано автором (для аналогичного уравнения второго порядка) в §3 главы монографии [2]. Автором разработан метод нахождения асимптотики собственных значений и асимптотики собственных функций краевых задач при условии выполнения (2). Для случая $n = 2$, $\rho(x) = 1$ другой метод был продемонстрирован в работе [3]. Для дифференциального оператора второго порядка с непостоянной весовой функцией это было проделано автором в работе [4]. Приведём явные формулы, полученные нами.

Введём необходимые нам обозначения:

$$\phi_{13}(x)=3\cdot\frac{(\rho^{/}(x))^2}{\rho^3(x)}-2\cdot\frac{\rho^{//}(x)}{\rho^2(x)},\ \phi_{23}(x)=-6\cdot\frac{(\rho^{/}(x))^3}{\rho^5(x)}+6\cdot\frac{\rho^{/}(x)\cdot\rho^{//}(x)}{\rho^4(x)}-\frac{\rho^{(3)}(x)}{\rho^3(x)},$$

$$\phi_{33}(x)=6\cdot\frac{(\rho^{/}(x))^2}{\rho^4(x)}-3\cdot\frac{\rho^{//}(x)}{\rho^3(x)} \quad (6)$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$A_{1k3}(x)=-\frac{1}{3a\omega_k}\cdot\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt,\ A_{2k3}(x)=\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\cdot\left[\frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)}-\frac{\phi_{13}(0)}{\rho(0)}-\int\limits_0^x\phi_{23}(t)dt+\frac{1}{6}\cdot\left(\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt\right)^2\right],$$

$$A_{3k3}(x)=-\frac{1}{9a^3}\cdot\left[3\cdot\frac{\phi_{23}(0)}{\rho(0)}-3\cdot\frac{\phi_{23}(x)}{\rho(x)}-\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt\cdot\int\limits_0^x\phi_{23}(t)dt+\frac{1}{18}\cdot\left(\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt\right)^3\right]-$$

$$-\frac{1}{9a^3}\cdot\left[\int\limits_0^x\frac{\phi_{13}^2(t)}{\rho(t)}\cdot dt+\frac{3}{\rho(x)}\cdot\left(\frac{\phi_{13}(t)}{\rho(t)}\right)^{/}+\frac{\phi_{13}^{/}(x)}{\rho^2(x)}+\frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)}\cdot\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt-\frac{\phi_{13}(0)}{\rho(0)}\cdot\int\limits_0^x\phi_{13}(t)dt\right]-$$

$$-\frac{1}{9a^3}\cdot\left[\int\limits_0^x\frac{\phi_{13}^{/}(t)\cdot\rho^{/}(t)}{\rho^3(t)}\cdot dt-\frac{3}{\rho(0)}\cdot\left(\frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)}\right)^{/}_{x=0}-\frac{\phi_{13}^{/}(0)}{\rho^2(0)}-\int\limits_0^x\phi_{13}(t)\cdot\phi_{33}(t)\cdot dt\right],k=1,2,3. \quad (7)$$

Аналогичные формулы справедливы также для функций $y_k^{/}(x,s)$ и $y_k^{//}(x,s)$, $k = 1, 2, 3$. В результате получаем:

$$y_k(x,s)=\rho^{-1}(x)\cdot e^{a\omega_k s\cdot M(t)}\cdot\left[1+\frac{A_1(x)\cdot\omega_k^2}{s}+\frac{A_2(x)\cdot\omega_k}{s^2}+\frac{A_3(x)}{s^3}+\ldots\right],\ k=1,\,2,\,3, \quad (8)$$

$$y_k^{/}(x,s)=(a\omega_k s)\cdot e^{a\omega_k s\cdot M(t)}\cdot\left[1+\frac{B_1(x)\cdot\omega_k^2}{s}+\frac{B_2(x)\cdot\omega_k}{s^2}+\frac{B_3(x)}{s^3}+\ldots\right],\ k=1,\,2,\,3, \quad (9)$$

$$y_k^{//}(x,s)=(a\omega_k s)^2\cdot\rho(x)\cdot e^{a\omega_k s\cdot M(t)}\cdot\left[1+\frac{D_1(x)\cdot\omega_k^2}{s}+\frac{D_2(x)\cdot\omega_k}{s^2}+\frac{D_3(x)}{s^3}+\ldots\right],\ k=1,\,2,\,3, \quad (10)$$

$$A_1(x) = -\frac{1}{3a} \cdot \int_0^x \phi_{13}(t)dt, \quad A_2(x) = \frac{1}{3a^2} \cdot \left[\frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)} - \frac{\phi_{13}(0)}{\rho(0)} - \int_0^x \phi_{23}(t)dt + \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^x \phi_{13}(t)dt \right)^2 \right],$$

$$B_1(x) = -\frac{1}{3a} \cdot \int_0^x \phi_{13}(t)dt - \frac{\rho^{/}(x)}{a\rho^2(x)}, \quad D_1(x) = -\frac{1}{3a} \cdot \int_0^x \phi_{13}(t)dt - \frac{\rho^{/}(x)}{a\rho^2(x)},$$

$$B_2(x) = \frac{1}{3a^2} \cdot \left[\frac{\rho^{/}(x)}{\rho^2(x)} \cdot \int_0^x \phi_{13}(t)dt - \frac{\phi_{13}(0)}{\rho(0)} - \int_0^x \phi_{23}(t)dt + \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^x \phi_{13}(t)dt \right)^2 \right],$$

$$D_2(x) = \frac{1}{3a^2} \cdot \left[\frac{\rho^{/}(x)}{\rho^2(x)} \cdot \int_0^x \phi_{13}(t)dt + \frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)} - \frac{\phi_{13}(0)}{\rho(0)} - \int_0^x \phi_{23}(t)dt + \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^x \phi_{13}(t)dt \right)^2 \right] -$$

$$-\frac{1}{a^2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\phi_{13}(x)}{\rho(x)} + \frac{\rho^{//}(x)}{\rho^3(x)} - 2 \cdot \frac{(\rho^{/}(x))^2}{\rho^4(x)} \right], \ldots \tag{11}$$

Теорема 2. Определитель Вронского

$$Wr(y_1(x,s), y_2(x,s), y_3(x,s)) = Wr(x,s) = \begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_3(x,s) \\ y_1^{/}(x,s) & y_2^{/}(x,s) & y_3^{/}(x,s) \\ y_1^{//}(x,s) & y_2^{//}(x,s) & y_3^{//}(x,s) \end{vmatrix} = W_0(s) \tag{12}$$

линейно независимых решений $y_1(x, s), y_2(x, s), y_3(x, s)$ дифференциального уравнения (3) не зависит от переменной x и имеет следующую асимптотику:

$$Wr(x,s) = W_0(s) = (as)^3 \cdot \left[1 + \frac{\Phi_0}{s} + \frac{\Phi_1}{s^2} + \frac{\Phi_3}{s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \right], \ \Phi_0 = \Phi_1 = 0 \,. \tag{13}$$

Доказательство теоремы 2 можно осуществить двумя способами. Первый заключается в подстановке асимптотик (8)-(11) в формулу (12) и разложении определителя по столбцам. При этом можно показать, что

$$\Phi_3(x) = A_3(x) + B_3(x) + D_3(x) + A_1 B_1 D_1 - A_1 D_2 - A_2 B_1 - B_2 D_1 = \Phi_3(0) \,. \tag{14}$$

Второй способ доказательства теоремы 2 (более нужный нам для дальнейшего) заключается в разложении определителя (12) по третьей строке и в явном нахождении асимптотик алгебраических дополнений $\Delta_{31}(x,s), \Delta_{32}(x,s)$ и $\Delta_{33}(x,s)$ к элементам третьей строки:
$Wr(x,s) = y_1^{//}(x,s) \cdot \Delta_{31}(x,s) - y_2^{//}(x,s) \cdot \Delta_{32}(x,s) + y_3^{//}(x,s) \cdot \Delta_{33}(x,s)$. При этом получаем:

$$\Delta_{31}(x,s) = (as) \cdot \rho^{-1}(x) \cdot e^{-a\omega_1 sM(x)} \cdot \left[H_{410} + \frac{H_{411}(x)}{s} + \frac{H_{412}(x)}{s^2} + \frac{H_{413}(x)}{s^3} + \ldots \right], \tag{15}$$

$$\Delta_{32}(x,s) = (as) \cdot \rho^{-1}(x) \cdot e^{-a\omega_2 sM(x)} \cdot \left[H_{420} + \frac{H_{421}(x)}{s} + \frac{H_{422}(x)}{s^2} + \frac{H_{423}(x)}{s^3} + \ldots \right], \tag{16}$$

$$\Delta_{33}(x,s) = (as) \cdot \rho^{-1}(x) \cdot e^{-a\omega_3 sM(x)} \cdot \left[H_{430} + \frac{H_{431}(x)}{s} + \frac{H_{432}(x)}{s^2} + \frac{H_{433}(x)}{s^3} + \ldots \right], \tag{17}$$

$$H_{410} = \omega_3 - \omega_2; \ H_{411}(x) = A_1(x) \cdot (\omega_2 - \omega_3); \ H_{412}(x) = (A_1(x) \cdot B_1(x) - B_2(x)) \cdot (\omega_3 - \omega_2);$$

$$H_{413} = A_3(x) \cdot (\omega_3 - \omega_2) + A_2(x) \cdot B_1(x) \cdot (\omega_2 - \omega_3) + B_3(x) \cdot (\omega_3 - \omega_2);$$

$$H_{420} = \omega_3 - \omega_1; \ H_{421}(x) = A_1(x) \cdot (\omega_3 - \omega_2); \ H_{422}(x) = (A_1(x) \cdot B_1(x) - B_2(x)) \cdot (\omega_1 - \omega_2);$$

$$H_{423} = A_3(x) \cdot (\omega_3 - \omega_1) + A_2(x) \cdot B_1(x) \cdot (\omega_1 - \omega_3) + B_3(x) \cdot (\omega_3 - \omega_1);$$

$$H_{430} = \omega_2 - \omega_1; \ H_{431}(x) = A_1(x) \cdot (\omega_2 - \omega_3); \ H_{432}(x) = (A_1(x) \cdot B_1(x) - B_2(x)) \cdot (\omega_1 - \omega_3);$$

$$H_{433} = A_3(x) \cdot (\omega_2 - \omega_1) + A_2(x) \cdot B_1(x) \cdot (\omega_1 - \omega_2) + B_3(x) \cdot (\omega_2 - \omega_1); \ldots \tag{18}$$

Перейдём к нахождению асимптотики решений дифференциального уравнения (1). Общее решение дифференциального уравнения (1) будем искать методом вариации постоянных в следующем виде:

$$y(x,s) = C_1(x,s)\cdot y_1(x,s) + C_2(x,s)\cdot y_2(x,s) + C_3(x,s)\cdot y_3(x,s)\,, \tag{19}$$

где y1 (x, s), y2 (x, s), y3 (x, s) — линейно независимые решения вспомогательного дифференциального уравнения (3), C1 (x, s), C2 (x, s), C3 (x, s) — неизвестные функции, которые можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x,s)\cdot y_1(x,s) + C_2'(x,s)\cdot y_2(x,s) + C_3'(x,s)\cdot y_3(x,s) = 0, \\ C_1'(x,s)\cdot y_1'(x,s) + C_2'(x,s)\cdot y_2'(x,s) + C_3'(x,s)\cdot y_3'(x,s) = 0, \\ C_1'(x,s)\cdot y_1'(x,s) + C_2'(x,s)\cdot y_2'(x,s) + C_3'(x,s)\cdot y_3'(x,s) = -q(x)\cdot y(x,s). \end{cases} \tag{20}$$

Решая систему (20), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Решение y (x, s) дифференциального уравнения (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k\cdot y_k(x,s) - \frac{1}{W_0(s)}\cdot\sum_{k=1}^{3} y_k(x,s)\cdot(-1)^{k-1}\cdot\int_0^x q(t)\cdot\Delta_{3k}(t,s)\cdot y(t,s)\cdot dt\,, \tag{21}$$

где yk (x, s) (k = 1, 2, 3) — линейно независимые решения дифференциального уравнения (3), асимптотика которых определена формулами (4)-(11), W0 (s) — определитель Вронского этих решений (см. (12), (13)).

Далее применим метод последовательных приближений Пикара: найдём y (t, s) из (21) и снова подставим его в уравнение (21).

Теорема 4. Общее решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k\cdot g_k(x,s)\,,\ \ y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k\cdot g_k^{(m)}(x,s),\ m = 1,2, \tag{22}$$

где Ck (x, s) (k = 1, 2, 3) — произвольные постоянные, gk (x, s) — линейно независимые решения дифференциального уравнения (1), причём при |s|→+∞ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$g_k(x,s) = y_k(x,s) - \frac{1}{W_0(s)}\cdot\sum_{n=1}^{3} y_n(x,s)\cdot\int_0^x q(t)\cdot\Delta_{3n}(t,s)\cdot y_k(t,s)\cdot dt\,,\ \text{k = 1, 2, 3.} \tag{23}$$

$$g_k^{(m)}(x,s) = y_k^{(m)}(x,s) - \frac{1}{W_0(s)}\cdot\sum_{n=1}^{3} y_n^{(m)}(x,s)\cdot\int_0^x q(t)\cdot\Delta_{3n}(t,s)\cdot y_k(t,s)\cdot dt\,,\ \text{m = 0, 1, 2.} \tag{24}$$

Список литературы:

1. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352с.

2. Митрохин С.И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. М.: ИНТУИТ, 2009. — 364 с.

3. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия: матем. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 47-108.

4. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений краевой задачи Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией. — 2008. — Рукопись депонирована в ВИНИТИ 07.07.2008, №581-В2008.

Работа представлена на Общероссийскую научную конференцию «Проблемы качества образования», Иркутск (5-7 июля 2010). Поступила в редакцию 15.06.2010 г.