Физико-математические науки

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Хачев М.М., Коков Н.С., Теммоева С.А.

ФГОУ ВПО «Кабардино-Балкарская государственная сельскохозяйственная академия», Нальчик, e-mail: khachev@mail.ru

В работе для уравнения смешанного типа в бесконечной цилиндрической области трехмерного пространства доказаны единственность и существование решение задачи Дирихле.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^m \left(V_{xx}+V_{zz}\right)+V_{yy}=0, \quad m>0 \qquad (1)$$

в бесконечной цилиндрической области Ω-трехмерного пространства (x, y, z), ограниченной поверхностями:

S: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(1-2\beta)^2 y^{2+m}=\frac{1}{4}, y\le 0, \ -\infty<z<+\infty,$

S: $x=0, \qquad -\alpha\le y\le 0, \quad -\infty<z<+\infty,$

S: $x=1 \qquad -\alpha\le y\le 0, \quad -\infty<z<+\infty,$

S: $0\le x\le 1, \qquad y=-\alpha, \quad -\infty<z<+\infty,$

причем характеристические поверхности

S: $x-(1-2\beta)(-y)^{\frac{2+m}{2}}=0, \ -\alpha\le y\le 0, \quad -\infty<z<+\infty,$

S: $x-1=(1-2\beta)(-y)^{\frac{2+m}{2}}, \quad -\alpha\le y\le 0, \quad -\infty<z<+\infty,$

проходит через точки $A(0, 0, 0)$; $B(1, 0, 0)$; $A_0(0, -\alpha, 0)$; $B_0(0, -\alpha, 0)$;

$$\alpha=(1-2\beta)^{2\beta-1},$$

$$2\beta=\frac{m}{(2+m)}.$$

Обозначим через $\Omega^+=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{y<0\}$ эллиптическую и гиперболическую части смешанной области Ω.

Задача Дирихле. *Найти решение* $V=V(x, y, z)$ *уравнения* (1) *в области* Ω *со следующими свойствами*

1) $V\in C\left(\overline{\Omega}\right)$;

2) $V\in C^1(\Omega)\cap C^2\left(\Omega^+\cup\Omega^-\right)$ *за исключением, быть может, характеристических поверхностей* S_4 *и* S_5;

3) *V удовлетворяет краевым условиям*

$$V\big|_{S_0}=\Phi(x, y),\ V\big|_{S_3}=0,\ 0\le x\le 1, -\infty<z<+\infty,$$

$$V\big|_{S_1}=0, \qquad V\big|_{S_2}=0, -\alpha\le y\le 0, -\infty<z<+\infty,$$

$\lim\limits_{z\to\pm\infty}V(x, y, z)=0$ равномерно относительно $(x, y)\in\overline{\Omega}\cap\{z=0\}$.

Функция $\Phi(x, z)$ непрерывна в области своего определения S_0, абсолютно интегрируема по z при $-\infty<z<+\infty$, $0\le x\le 1$ и равномерно относительно x стремится к нулю при $z\to\pm\infty$.

Обозначим через Γ_i линии пересечения поверхностей S, $i=0, 1, 2, 3$ с плоскостью $z=0$, а через D область плоскости (x, y), ограниченную этими линиями. Пусть $D^+=D\cap(y>0)$, $D^-=D\cap(y<0)$ – эллиптическая и гиперболическая части смешанной области D соответственно.

Решение задачи Дирихле будем искать методом преобразования Фурье [1]:

$$V(x, y, z,)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x, y, \lambda)e^{-i\lambda z}\,d\lambda, \qquad (2)$$

где функция $u(x, y, \lambda)$ выражается через $V(x,y,z)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$u(x, y, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x, y, z)e^{i\lambda z}dz\ ,\ \lambda\in R \qquad (3)$$

и в области D удовлетворяет уравнению

$$F(u)=\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx}+u_{yy}-$$

$$-\lambda^2\operatorname{sgn} y|y|^m u=0,\ m>0,\ \lambda\in R. \qquad (4)$$

С помощью преобразований Фурье (2) исходная пространственная задача Дирихле эквивалентно редуцирована к следующей плоской задаче Дирихле.

Задача Дирихле. *Найти решение* $u=u(x, y, \lambda)$ *уравнения (4) в области D со следующими свойствами*

1) $u\in C(\overline{D})$;

2) $u\in C^1(D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$ *за исключением, быть может, характеристик уравнения (4), проходящих через вершины прямоугольника в* D^-;

3) *u удовлетворяет краевым условиям*

$$u\big|_{\Gamma_0}=\phi(x,\lambda),\quad u\big|_{\Gamma_3}=0,\quad 0\le x\le 1,\quad \lambda\in R,$$

$$u\big|_{\Gamma_1}=0,\qquad u\big|_{\Gamma_2}=0,\qquad -\alpha\le x\le 0,\quad \lambda\in R,$$

где $\phi(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\aleph}\Phi(x, z)e^{i\lambda z}\,dz\ 0\le x\le 1, \lambda\in R.$

Таким образом, сопоставляя задачи Дирихле в области Ω и D, видим, что доказательство существования решения задачи Дирихле в области Ω для уравнения (1) сводится к доказательству разрешимости задачи Дирихле для уравнения (4) в области D при любом действительном значении параметра $\lambda\in R$.

Имеет место теорема.

Теорема. *Задача Дирихле для уравнения (4) в области D имеет не более одного решения, если* $u\big|_{\Gamma_i}=0$, *I = 1, 2, 3, 4.*

Доказательство теоремы проводится методом «а, в, с» как это сделано в работе [2].

Хорошо известно [2], что первое функциональное соотношение между функциями $\tau^+(x)$ и $v^+(x)$, принесенное из эллиптической части области на линию вырождения $y = 0$, $0 \le x \le 1$ имеет вид:

$$\tau^+(x,\lambda) = -k_1\int_0^1 v^+(\xi,\lambda)\left[|\xi - x|^{-2\beta} - (\xi + x - 2\xi x)^{-2\beta}\right]d\xi + \int_0^1 v^+(\xi,\lambda)M_0(x,\xi,\lambda)d\xi +$$

$$+\int_0^1 \phi(\xi,\lambda)A(\xi,x,0)d\xi + \int_0^1 \phi(\xi,\lambda)N_0(x,\xi,\lambda)d\xi, \tag{5}$$

где

$$M_0(x,\xi,\lambda) = \lambda^2\int_{D^+} R\left(x,0,t,z,-\lambda^2\right)A(\xi,t,z)dtdz,$$

$$N_0(x,\xi,\lambda) = -\lambda^2\int_{D^+} R\left(x,0,t,z,-\lambda^2\right)A(\xi,t,z)dtdz,$$

$$A(\xi,x,y) = \frac{\beta k_1}{2}(1-2\beta)^{-2\beta}\left(1-4\tau_0^2\right)\left(\xi-\xi^2\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\left(\rho_1^{-2}\right)^{-\beta-1}[F(\beta,\beta,2\beta,1-\sigma_0)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-\sigma_0)F(1+\beta,1+\beta,1+2\beta,1-\sigma_0)];$$

$$\sigma_0 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2},\quad \rho^2 = (\xi-x)^2 + \left[\sqrt{\xi-\xi^2} - (1-2\beta)y^{\frac{2+m}{2}}\right]^2,\quad \rho_1^2 = (\xi-x)^2 + \left[\sqrt{\xi-\xi^2} + (1-2\beta)y^{\frac{2+m}{2}}\right]^2,$$

$$k_1 = \frac{\Gamma^2(\beta)}{4\pi\Gamma(2\beta)}(2-4\beta)^{2\beta},\quad \tau_0 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2\beta)^2 y^{m+2},\quad 2\beta = \frac{m}{2+m},$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина задачи Неймана [2], $F(a, b; c, z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [3], $R(x, y, t, z, -\lambda^2)$ – резольвента интегрального уравнения, а $\phi(x,\lambda) = u|_{\Gamma_0}$.

Второе функциональное соотношение между функциями $\bar{\tau}(x,\lambda)$ и $\bar{v}(x,\lambda)$, принесенное из области гиперболичности D^- на линию вырождения $y = 0$, $0 < x < 1$, $\lambda \in R$, имеет вид [4]:

$$v^-(x,\lambda) = f(x,\lambda) + \int_0^1 k(x,\xi,\lambda)v^-(\xi,\lambda)d\xi, \tag{6}$$

где

$$\Psi(x,\xi,\lambda) = x^\beta(x-\xi)^{\beta-1}\Psi_0(x,\xi,\lambda),$$

$$k(x,\xi,\lambda) = x^\beta(x-\xi)^{1-\beta}k_0(x,\xi,\lambda),$$

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(2\beta)},$$

$$f(x,\lambda) = \frac{\sin\pi\beta}{\pi\gamma_2(2-4\beta)^{2\beta-1}}\frac{d}{dx}\int_0^\pi \frac{\tau^-(z,\lambda)}{(x-\xi)^{1-2\beta}}d\xi +$$

$$+\int_0^1 \Psi(x,\xi,\lambda)\tau^-(\xi,\lambda)d\xi,$$

$\Psi_0(x, \xi, \lambda)$ и $k_0(x, \xi, \lambda)$ – ограниченные функции. Исключая функцию $\tau(x, \lambda)$ из соотношения (5) и (6) и выполняя известные преобразования [5], мы получим полное сингулярное интегральное уравнение :

$$v(x,\lambda) - \gamma\int_0^1\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{\xi+x-2\xi x}\right)v(\xi,\lambda)d\xi = f(x,\lambda), \tag{7}$$

где

$$f(x,\lambda) = \int_0^1 \frac{\Psi(x,\xi\ \lambda)d\xi}{1+\sin\pi\beta}\int_0^1 \phi(t,\lambda)\left[A(t,\xi,0) + N_0(\xi,t,\lambda)\right]dt +$$

$$+\frac{(2-4\beta)^{1-2\beta}\sin\pi\beta}{\pi\gamma_2(1+\sin\pi\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}\int_0^1 \phi(t,\lambda)\left[A(t,\xi,0) + N_0(\xi,t,\lambda)\right]dt;$$

$$-\int_0^1 H(x,\xi,\lambda)v(\xi,\lambda)\,d\xi;\quad \gamma = \frac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)},\quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(2\beta)},$$

$$H(x,\xi,\lambda) = \frac{k_1}{1+\sin\pi\beta}\int_0^1 \Psi(x,t,\lambda)\left[|t-\xi|^{-2\beta} - (t+\xi-2\xi t)^{-2\beta}\right]dt -$$

$$-\frac{k(x,\xi,\lambda)}{1+\sin\pi\beta} - \frac{1}{1+\sin\pi\beta}\int_0^1 \Psi(x,t,\lambda)M_0(t,\xi,\lambda)dt - \frac{(2-4\beta)^{1-2\beta}\sin\pi\beta}{\pi\gamma_2(1+\sin\pi\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{2\beta-1}\frac{dM_0(t\xi,\lambda)}{dt}dt.$$

Интегральное уравнение (7), следуя общей схеме [6, 7], эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, существование единственного решения которого следует из теоремы единственности решения задачи Дирихле для уравнения (4).

Пусть теперь

$$\phi(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}\right)$$

при $|\lambda|\to+\infty$ и $\varepsilon>0$, тогда нетрудно получить оценку для функции $u(x, y, \lambda)$ при

$$u(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}\right),\ \ \varepsilon>0,\ (x,y)\in\overline{D},$$

которая обеспечивает существование интегрального преобразования Фурье (2) и, следовательно, существование единственного решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области Ω.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. матем. журн. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 642-644.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
3. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1965. – Т. 1.
4. Хачев М.М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Диф. уравнения. – 1976. – Т. 12, №1. – С. 137-143.
5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 295 с.
6. Manwell A. Arch. Rut Vfch. Analysis. – 1963. – №12, 3. – P. 250-258.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Работа представлена на Международную научную конференцию «Научные исследования высшей школы по приоритетным направления науки и техники», на борту круизного лайнера Costa Magica, 9-19 июня 2011. Поступила в редакцию 27.06.2011.

Аннотация издания

Технические науки

ТОПЛИВО, СМАЗОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, ТЕХНИЧЕСКИЕ ЖИДКОСТИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ (учебное пособие)

Никифоров И.К.

Улан-Удэ, e-mail: uuf.vpo@mail.ru

В современных условиях эксплуатации железнодорожного транспорта требуются высококачественное топливо, марочные трансмиссионные и гидравлические масла, различные технические жидкости, пластичные смазки и т.п.

Знание теории и эксплуатационных свойств нефтепродуктов, приемов их рационального использования – важная составная часть общей подготовки инженеров-механиков, призванных обеспечить надежную и долговечную работу техники и снизить издержки на эксплуатацию большого парка железнодорожного транспорта. При этом необходимо учитывать следующие факторы:

– резко-континентальный климат Восточной Сибири с суровой зимой;

– то, что основная часть территории Бурятии составляет природоохранную зону оз. Байкал, отнесенного к объектам мирового наследия.

В данном пособии наряду с материалами общетеоретического характера особое внимание уделено эксплуатационным свойствам и основам рационального использования топлива, смазочных материалов и технических жидкостей в соответствии с Государственным образовательным стандартом при подготовке инженеров-механиков и с учетом национально-регионального компонента.

«Энергетическая стратегия России до 2020 года» предполагает увеличить с 1995 до 2010 г. добычу газа на 12 %, нефти на 10 %, угля на 28 %, а в период с 1995 до 2020 г. – газа на 27 %, нефти на 12 %, угля на 60 %. Планируется увеличить выработку электроэнергии от 870 до 1125 млрд кВт·ч к 2010 г. и до 1585 млрд кВт·ч к 2020 г.

Энергоемкость экономики России в три раза выше мировой. Это вызвано не только техническим и технологическим уровнем производства, а прежде всего нерациональным использованием до двух третей всех топливных ресурсов. Поэтому ставится задача выполнить план выработки электроэнергии путем замены конденсационных электростанций на парогазовые установки, увеличивающие КПД станций от 32–34 до 52–54 %. Новые станции позволят повысить коэффициент использования оборудования от 0,45 до 0,7. Станет возможной выработка к 2020 г. 1450 млрд кВт·ч электроэнергии (от плана 1585 млрд кВт·ч).

Крупным потребителем топлива являются системы отопления предприятий, учреждений и ЖКХ. Теплоту для отопления зданий они получают: от электростанций (36 %), от отопительных котельных (46 %) и других источников (18 %). При этом реальный кпд старых угольных котельных, часть которых была переведена на газ, не выше 60 %. Поэтому котельные на газе предполагается поменять на газотурбинные установки (ГТУ). Они до30 % теплоты превратят в электроэнергию, до 55 % отдадут в системы отопления ее потери не превысят 15 % против более чем 30 % потерь в современных ко-