Физико-математические науки

АКСИОМА 8 ЕВКЛИДА И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ

Сухотин А.М.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, e-mail: asukhotin@andex.ru

1. Бурное развитие и рост математического знания в средние века и в Новое время поставили в конце XIX – начале XX веков математическое сообщество перед необходимостью строгого обоснования анализа и всей математики. Однако и в начале XXI веков в этой области остались нерешённые или решённые не до конца проблемы. Некоторые из этих проблем связаны с понятием бесконечности в математики и были формально описаны ещё Галилео Галилеем в первой половине XVII века [1]. Известно, что в классическом анализе $\sum_1^\infty (1)^n = \infty$ и $\sum_1^\infty 1/n = \infty$, то есть символом ∞ бесконечность обозначено даже в математике слишком многое. Это не только не допускает изучение свойств понятия бесконечности, но и не позволяет адекватно использовать математические методы в областях знания и в моделях, имеющих неограниченные области изменений параметров, например, в космологии.

Объектом нашего исследования являются Аксиома 8 Евклида «И целое больше части» [2], альтернативные методы в анализе и обоснование этих методов, в частности: инъективные отображения на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел (натуральные последовательности), альтернативная теория числовых последовательностей и числовых рядов.

2. Аксиому 8 Евклида мы исследовали в рамках наивной теории множеств Пауля Халмоша [3]. Доказательства некоторых утверждений альтернативного анализа становятся очевидными, если принять Аксиому 8 Евклида. Здесь мы использовали известные математические тексты и следовали прогнозу Пола Коэна о континуум-гипотезе (КГ): «Точка зрения, которая, как предчувствует автор, может в конце концов стать принятой, состоит в том, что КГ является, *очевидно,* ложной» [4, IV.13]. Аксиому 8 Евклида мы доказали в форме следующей теоремы. Если $B \subset A$ и $\varphi: A \to B$, тогда во множестве A найдётся такая пара (a, q) элементов a и q, что $a \neq q$ & $\varphi(a) = \varphi(q)$, или, в канонически краткой форме:

$$B \subset A \Rightarrow |A| \neq |B|. \qquad (1)$$

Условие (1) нарушения эквивалентности множеств A и B в сформулированной выше теореме имеет следующую, более точную (скажем по определению) запись: $B \subset A \Rightarrow |A| > |B|$. И, в частности, при $A = B \cup \{q\}$ и $q \notin B$, (1) влечёт неравенство: $|B| < |B \cup \{q\}|$. Это неравенство и импликация (1) открывают новый путь развитию теории мощностей бесконечных множеств.

Следовательно, в отношении эквивалентности семейство бесконечных множеств (как и множество конечных множеств) делится на классы «с точностью до элемента».

3. Получение новых результатов в теории числовых последовательностей, где многое стало математическим фольклором, не возможно без новой методологии. Основой такой методологии стали новые методы исследования отображений f: $N \to N$. Равномерная направленность множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел мотивирует введение методологически нового понятия *C-точной пары* (m, n) *натуральных переменных*. Пусть подмножество $A \subset N$ является бесконечным и $A \cup A_i$, $i \in I$, некоторое естественное разбиение множества A. И пусть

$$\alpha_i \triangleq \min(A_{i+1}) - \max(A_i),\ i \in I.$$

Натуральную переменную (m, A) с естественным порядком из множества N назовём α-натуральной переменной, если $\alpha = \sup_{i \in I}\{\alpha_i\}$. Пусть (k, B) некоторая β-натуральная переменная. Пусть $E \triangleq A \cup B$. Пара $\{(m, A), (k, B)\}$ натуральных переменных (m, A) и (k, B) называется C-точной парой, если натуральная переменная (n, E) является C-натуральной переменной, здесь очевидно, что $C \leq \inf\{\alpha, \beta\}$.

Определение 1. *Числовая последовательность* (***a***) *называется e-расходящейся, если существуют такие две бесконечные подпоследовательности* ξ_1, $\xi_2 \subset \boldsymbol{N}$, $\xi_1 \cap \xi_2 = \varnothing$, *что выполняется следующее условие*:

$$\exists(\delta > 0,\ n^* \in \boldsymbol{N}): \forall(m,k) \subset (\xi_1, \xi_2)\ m,\ k > n^*\ \left|a_m - a_k\right| \geq \delta).$$

или, что то же самое, но в предельной форме записи $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Главные результаты здесь:

а) доказано существование неограниченных конечным числом последовательностей Коши (***CS***), их предельные значения образуют по определению множество бесконечно больших чисел;

б) доказано, что $\{(w\text{-}\boldsymbol{CS})\} = \{(\boldsymbol{CS})\}$, (см. [5]).

Далее мы вводим ещё одно принципиально новое понятие.

Определение 2. *Мы называем числовую последовательность* (***a***) *w-сходящейся последовательностью* (*w-**CS***), *если выполняется следующее условие*:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in N): (\forall\, n \geq n(\varepsilon)\ \left|a_{n+1} - a_n\right| < \varepsilon),$$

4. Альтернативная теория числовых рядов начинается выделением из понятий частичной n-й суммы и n-го остатка числового ряда значений этих сумм с конечным и неограниченном количеством слагаемых, соответственно:

$$\sum a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \sum_{n+1}^{\infty} a_i \triangleq \Sigma_n + \rho_n.$$

До конца семнадцатого века в теории рядов решалась одна задача: найти сумму ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Но в последнее десятилетие XVII века швейцарские математики Яков и Иоган Бернулли установили, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + C_e + \gamma_n,$$

где C_e = 0,57721566490… − *константа,* названная впоследствии постоянной Эйлера, а $\gamma_n \to 0$. По общему признанию математиков это равенство было принято за доказательство расходимости гармонического ряда. Так что с начала XVIII века условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ стало математиками называться лишь необходимым условием сходимости числового ряда. С точки зрения альтернативного анализа, более 300 лет под сходимостью числового ряда понималась только сходимость к конечному числу. Такое предубеждение закрыло путь к корректному определению бесконечно больших чисел – это, во-первых. Во-вторых, более 150 лет назад Б. Риман написал неполную страницу текста о знакопеременных рядах [6]. И более к этому вопросу он не обращался. Но до сих пор математическая общественность называет этот текст «классической теоремой Римана о знакопеременных рядах», а именно: сходимость знакопеременного условно сходящегося ряда зависит от перестановки слагаемых ряда. При этом наивно считается, что перестановка бесконечного множества такой же простой объект, каким является биекция между конечными множествами. С точки зрения альтернативного анализа инъективные отображения заслуживают более внимательного отношения. Не всякая инъективная функция f: $N \to N$, выполнимая на некотором начальном отрезке натурального ряда, будет биективной на всём множестве $\boldsymbol{N}$, то есть не каждая такая функция f является перестановкой. Перестановки слагаемых числовых рядов представляют широко используемую часть общей теории рядов. И, как мы доказали, эта часть теории рядов неоправданно широка.

5. Основные доказанные результаты этой работы перечислены ниже:

а) а в рамках наивной теории множеств верна Аксиомы 8 Евклида «И целое больше части»;

б) истинно равенство $\{(w\text{-}\boldsymbol{CS})\} = \{(\boldsymbol{CS})\}$;

в) гармонический ряд сходится к соответствующему бесконечно большому числу;

г) необходимый признак сходимости числового ряда является и достаточным;

д) сходимость числового ряда не зависит от перестановки его слагаемых;

е) свойства конечных сумм сохраняются при потенциально неограниченном увеличении количества слагаемых таких сумм;

ж) получены новые регулярные признаки сходимости числовых рядов;

е) из множества расходящихся в классическом смысле числовых последовательностей и рядов выделены последовательности и ряды сходящихся к бесконечно большим числам.

Список литературы

1. Галилей Г. Избранные труды: в 2-х т., Т. 2. – М.: Наука, 1964. – 571 с.

2. Начала Евклида: пер. с греч. – М.-Л. ОГИЗ. – Книги I–VI, 1948; Книги VII–X, 1949; Книги XI–XVI, 1950.

3. Halmosh Paul. R. Naive Set Theory. – Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, Inc. – 1960.

4. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза: пер. с англ. – М.: Мир, 1968.

5. Сухотин А.М. Начало высшей математики: учебное пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 164 с.

6. Риман Б. Сочинения / ред. статья и примечания В. Л. Гончарова. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 543 с.

Экология и рациональное природопользование

ПРИОРИТЕТНОСТЬ ВОПРОСОВ ЭКОБЕЗОПАСНОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАНОМАТЕРИАЛОВ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Юшкевич Л.С., Цымбал М.В.

Академиz маркетинга и социально-информационных технологий – ИМСИТ, Краснодар,
e-mail: vshkevich_lub@mail.ru

Концепция социально-экономического развития России до 2020 года ориентирует образование на конкретные компетенции и формирование условий стимулирующих самообразование. При этом также отмечается, что в системе современного образования экологическая составляющая должна стать одной из основополагающих, поскольку именно она призвана формировать экоцентрическое мировоззрение человека [1, 2].

Необходимость разработки учебно-методических материалов для многоуровневой подготовки в области экологии, отвечающей международным стандартам и имеющей междисциплинарный характер, обусловлена возрастающей значимостью образовательных систем в контексте модернизации российского общества.

Элективные курсы это новейший механизм актуализации и индивидуализации процесса обучения, являющийся средством такого эмоционального, социального и интеллектуального развития обучаемого, которое обеспечивает переход от обучения к самообучению и самообразованию.