здесь μ – коэффициент вязкости; Ω – область в R^3; S – граница области Ω; ψ – функция тока; f – массовая сила; $0 < \gamma <$ const.

Система уравнений (1)-(2) является системой составного типа, поэтому непосредственное применение метода расщепления затруднительно. И для приближенного решения задачи (1)-(2) методом дробных шагов рассмотрим систему уравнений с малым параметром

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+Q_m\right)+\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\psi_y^\varepsilon\omega_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\omega_y^\varepsilon=\Delta\omega^\varepsilon+\gamma\theta_y^\varepsilon,\quad \omega^\varepsilon=\Delta\psi^\varepsilon;$$
$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}+\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon=\lambda\Delta\theta^\varepsilon; \tag{3}$$

$$\theta^\varepsilon\big|_{t=0}=\theta_0(x),\qquad \psi^\varepsilon\big|_{t=0}=\psi_0(x),\qquad \left.\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_1(x); \tag{4}$$
$$\left.\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial n}\right|_S=\psi^\varepsilon\big|_{S_0}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\right|_S=0,\qquad t\in[0,T],$$

где $\psi_0(x)=\psi\big|_{t=0}$, $\psi_1(x)=\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}$ находятся из системы (1)-(2). $Q_m(x)$ – функция известная, обеспечивающая условий

$$\left.\frac{\partial^k\psi^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\right|_{t=0},\quad \left.\frac{\partial^k\theta^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^k\theta}{\partial t^k}\right|_{t=0}. \tag{5}$$

Дальнейшее обозначения взяты из работы [2].

Теорема 1. Пусть $\psi_0(x)\in W_2^2(\Omega)$, $\psi_1(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\theta_0(x)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (3)-(4) и имеет место:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T,\hat{W}_2^1(\Omega))}\le C<\infty.$$

и оно сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Список литературы

1. Седов Т.И. Механика сплошной среды. В 2т. – М.: Наука, 1973. – Т1. – 536 с.

2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.

ВЛИЯНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА НА ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТВЕРДОЙ КРЫШКИ

Ольшанская Е.В.

Отдел «Гидрологии и гидрохимии» ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону,

e-mail: ekaterina.olshanskaya@yandex.ru

Рассмотрена модель движения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости, линеаризованная относительно состояния покоя, в приближении твердой крышки. В предположении постоянной частоты Вяйсяля-Брента определены спектральные характеристики внутренних волн при наличии приближения Буссинеска и без него. Получены аналитические выражения для максимума погрешности.

1. Для исследования задачи о распространении внутренних гравитационных волн в океане воспользуемся моделью идеальной несжимаемой нетеплопроводной жидкости [1]. Линеаризуя систему уравнений и краевых условий в приближении твердой крышки, относительно состояния покоя [1], приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2W}{dz^2}-\dfrac{\mu(z)}{g}\dfrac{dW}{dz}+\dfrac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}k^2W(z)=0;\\ W(-H)=0,\quad W(0)=0.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь $W=W(z)$ – амплитудная функция вертикального смещения частиц жидкости, k – волновое число; ω – частота свободных колебаний частиц жидкости; $g=9{,}81$ м/с^2 – ускорение свободного падения; $f=10^{-4}$ 1/с – параметр Кориолиса [1],

$$\mu(z)\equiv N^2(z)=-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}.$$

Здесь $N(z)$ частота Вяйсяля-Брента [1]; $\rho_0=\rho_0(z)$ – плотность жидкости в состоянии покоя. Далее везде будем использовать неравенство

$$0<f^2<\omega^2<\min_{z\in[-H,0]}\mu(z).$$

Краевые условия в (1) осуществляют фильтрацию внутренних волн от поверхностных.

Приближение Буссинеска состоит в том, что члены в уравнении задачи (1), пропорциональные $\frac{\mu(z)}{g}$, опускаются. Данное приближение является аппроксимационным:

$$\begin{cases} \frac{d^2W}{dz^2} + \frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) = 0; \\ W(-H) = 0, \quad W(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Как видно из основной краевой задачи (1), частота Вяйсяля-Брента является единственной характеристикой стратификации жидкости, определяющей поведение внутренних волн. Далее рассмотрим случай, когда частота плавучести является постоянной величиной. В этом случае дифференциальное уравнение основной краевой задачи (1) является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2W}{dz^2} - \frac{\mu_0}{g}\frac{dW}{dz} + \frac{\mu_0 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) = 0. \quad (3)$$

Его характеристический многочлен имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu_0}{2g} \pm iR, \quad R^2 = \frac{\mu_0 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 - \frac{\mu_0^2}{4g^2} > 0. \quad (4)$$

Соответствующая фундаментальная система решений имеет вид

$$\left\{ e^{\frac{\mu_0}{2g}z} \sin Rz; e^{\frac{\mu_0}{2g}z} \cos Rz \right\}.$$

Для рассматриваемой краевой задачи (1) решение представим в виде

$$W(z) = Ce^{\frac{\mu_0}{2g}z} \sin(R(z+H)),$$

где C – произвольная постоянная ($C \neq 0$). Первое краевое условие удовлетворяется тождественно. Подстановка $W(z)$ во второе условие приводит к следующему уравнению:

$$\sin RH = 0 \;\Rightarrow\; RH = \pi n, \; n \in Z. \quad (5)$$

Откуда, используя представление для R^2 из (4), находим дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \frac{K^2\mu_0 + Af^2}{K^2 + A}, \quad K = kH, \; A = \pi^2 n^2 + \frac{\mu_0^2}{4g^2}H^2, \; n \in Z. \quad (6)$$

Для каждого конкретного значения k по формуле (6) может быть найдена бесконечная серия значений $\omega_n(k)$. Выбирая для фиксированного k из каждой серии наибольшие (первые, вторые и т.д.) значения $\omega_n(k)$, построим первую (вторую и т.д.) дисперсионную кривую.

В случае приближения Буссинеска характеристический многочлен дифференциального уравнения краевой задачи (2) имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{\mu_0 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 = 0$$

откуда находим его мнимые корни:

$$\lambda_{1,2} = \pm iR, \quad R^2_{\text{Бус}} = \frac{\mu_0 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 > 0. \quad (7)$$

Фундаментальная система решений дифференциального уравнения краевой задачи в приближении Буссинеска имеет вид

$$\left\{ \sin R_{\text{Бус}} z; \; \cos R_{\text{Бус}} z \right\}$$

Представим решение в виде

$$W(z) = C \sin(R_{\text{Бус}}(z+H)),$$

где C – произвольная постоянная ($C \neq 0$). Подставляя $W(z)$ во второе краевое условие, получаем уравнение вида (5), которое приводит к следующему дисперсионному соотношению $\omega = \omega(k)$:

$$\omega^2_{\text{Бус}} = \frac{K^2\mu_0 + A_{\text{Бус}} f^2}{K^2 + A_{\text{Бус}}}, \quad K = kH, \quad A_{\text{Бус}} = \pi^2 n^2, \quad n \in Z. \quad (8)$$

Сравнивая аналитическое выражение для дисперсионных кривых в приближении Буссинеска (8) и без него (6), получаем, что для каждого фиксированного значения волнового числа k $\omega^2_{\text{Бус}\,n} > \omega^2_n$:

$$\delta\omega^2_n = \omega^2_{\text{Бус}\,n} - \omega^2_n = \frac{\mu_0^2 H^2}{4g^2} \frac{K^2(\mu_0 - f^2)}{(K^2 + \pi^2 n^2)(K^2 + \pi^2 n^2 + \frac{\mu_0^2}{4g^2}H^2)} > 0, \quad \text{т.к.} \quad \mu_0 > f^2.$$

Из последнего выражения видно, что для каждого фиксированного k с ростом номера моды $\delta\omega^2_n \to 0, \quad n \to \infty$, т.е. погрешность, вносимая приближением Буссинеска, становится незначительной. Исследуя производную $\frac{\partial(\delta\omega^2)}{\partial(K^2)}$, опишем подробнее поведение погрешности, вносимой приближением Буссинеска:

$$\frac{\partial(\delta\omega^2)}{\partial(K^2)} = \frac{\mu_0^2 H^2}{4g^2} \frac{\left(\mu_0 - f^2\right)\left(\pi^2 n^2 \left(\pi^2 n^2 + \frac{\mu_0^2}{4g^2}H^2\right) - K^4\right)}{\left(\left(K^2 + \pi^2 n^2\right)\left(K^2 + \pi^2 n^2 + \frac{\mu_0^2}{4g^2}H^2\right)\right)^2}.$$

Откуда замечаем, что при сравнении любых двух фиксированных мод (в приближении Буссинеска и без него), существует максимум погрешности при некотором критическом значении волнового числа $k = k_*$, определяемого формулой:

$$k_*^2 = \frac{|\pi n|}{H}\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{H^2} + \frac{\mu_0^2}{4g^2}}, \quad n \in \mathrm{Z}. \tag{9}$$

2. На языке Matlab 7.0 создан комплекс программ, вычисляющий спектральные характеристики свободных колебаний неоднородной жидкости в приближении Буссинеска и без него для краевых условий в приближении твердой крышки. Построены и сравнены несколько первых дисперсионных кривых для случая следующих значений частоты плавучести $\mu_0 = \{0{,}00001;\ 0{,}0001;\ 0{,}001;\ 0{,}01\}$, для глубины $H = 1100$ м. В табл. 1 приведены значения волнового числа, на которых достигается максимум погрешности, вносимой приближением Буссинеска, для первых четырех мод. В табл. 2 приведены пары (k_n, $\delta\omega^2_n(k)$), лежащие в окрестности максимума погрешности вычисления дисперсионных кривых, вносимой приближением Буссинеска:

Таблица 1

Критические значения волнового числа $k_*(n)$, доставляющие максимум $\delta\omega^2_n(k)$, $\mu_0 = 0{,}0001$

n – номер моды	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k_*(n)$	0,002856	0,005712	0,008078	0,0098935

Таблица 2

Точки (k_n, $\delta\omega^2_n(k)$), лежащие в окрестности максимума погрешности, μ_0=0,0001

	$k = 0{,}001$	$k = 0{,}002$	$k = 0{,}003$	$k = 0{,}004$	$k = 0{,}005$	$k = 0{,}006$	$k = 0{,}007$
$\delta\omega^2_1(k)$	3,1e-11	7,0e-11	7,9e-11	7,1e-11	5,9e-11	4,8e-11	3,9e-11
$\delta\omega^2_2(k)$	2,0e-12	8,0e-12	1,3e-11	1,8e-11	2,0e-11	2,0e-11	1,9e-11

Алгоритм расчета влияния приближения Буссинеска на спектральные характеристики:

1. Задание исходных данных краевой задачи (1) и (2) – μ_0, H;

2. Расчет дисперсионных кривых по формулам (6) и (8) – для каждого фиксированного значения k_i вычисляются серии $\{\omega_{i,l}\}$, l = 1, 2, 3, 4. Для первой моды (l = 1) при каждом фиксированном значении k_i выбираем наибольшие значения из $\{\omega_{i,1}\}$, где i – фиксировано, для второй моды выбираем следующее по убыванию значение из серии $\{\omega_{i,1}\}$ и т.д.

3. Расчет влияния приближения Буссинеска поточечно – для каждой фиксированной дисперсионной кривой n, для каждого фиксированного волнового числа k_i находится

$$\delta\omega_{i,n} = \frac{|\omega_{i,n} - \omega_{\text{Бус},i\ n}|}{\omega_{i,n}} 100\%.$$

Строятся графики $\delta\omega_i = \delta\omega_i(k)$, рассчитываются пары $(k_i, \delta\omega_i^2(k))$.

3. Влияние приближения Буссинеска на вычисление частоты колебаний внутренних волн в неоднородной жидкости имеет локальный максимум, который вычисляется для каждой отдельной дисперсионной кривой и убывает с номером моды. С увеличением значения волнового числа влияние приближения Буссинеска затухает для каждой дисперсионной кривой.

Автор выражает благодарность академику ЕАЕ, академику РАЕ профессору Потетюнко Э.Н.

Список литературы

1. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 301 с.

Экономические науки

ПРОБЛЕМЫ ЭФФЕКТИВНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕРНЕТ-ПОРТАЛОВ РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

Милорадов К.А.

ГОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова», Москва, e-mail: mka.rea@yandex.ru

Российский сегмент глобальной сети Интернет интенсивно развивается. Одним из показателей этого развития является увеличение количества веб-сайтов и интернет-порталов, персональных, государственных и корпоративных. Статические веб-сайты есть, как правило, и у большинства высших учебных заведений (университетов). Многие университеты перешли от использования веб-сайтов к интернет-порталам.

Интернет-портал – это веб-сайт, предоставляющий пользователю единую точку входа в личный кабинет для управления различными интерактивными сервисами (например, электронная почта, средства поиска, тематические новости, форумы, обсуждения, голосования, блоги, размещение файлов, фотографий, видео, открытки) с возможностью персонализации.

Однако для многих российских университетов остается проблемой недостаточно эффек-