***Физико-математические науки***

## ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Кончина Л.В.

*Смоленский филиал Московского энергетического института (ТУ), Смоленск, e-mail: la_kon@mail.ru*

Рассмотрим движение симметричного твердого тела переменной массы с закрепленной точкой, на которое действует дополнительная сила переменного направления, параллельного линии, лежащей в неподвижной горизонтальной плоскости перпендикулярно линии узлов. Предположим, что точка приложения дополнительной силы $\vec{F} = \vec{F}(t)$ находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (точка приложения силы перемещается во всё время движения относительно твёрдого тела).

Дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела переменной массы (динамические уравнения Эйлера) с закрепленной точкой в общем случае, если момент реактивных сил равен нулю, согласно [1], имеют вид:

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)r\,q + A(\tilde{q}r - \tilde{r}q) = M_x(t),$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)p\,r + B(\tilde{r}p - \tilde{p}r) = M_y(t), \quad (1)$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)p\,q + C(\tilde{p}q - \tilde{q}p) = M_z(t),$$

где *x, y, z* – подвижные оси, неизменно связанные с телом; *p, q, r* – проекции вектора угловой скорости вращения тела на оси подвижной системы координат, совпадающие в каждый момент времени с главными осями эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки *O;* $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ – проекции вектора угловой скорости вращения на оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции для неподвижной точки; *A, B, C* – моменты инерции тела относительно осей *x, y, z*; $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ – моменты внешних сил, приложенных к телу относительно тех же осей координат.

Динамические уравнения Эйлера для симметричного твёрдого тела ($2A = B$) с центром масс в неподвижной точке в данном случае имеют вид

$$A\frac{dp}{dt} + (C-2A)r\,q = Fy'\gamma_3'\cos\phi;$$
$$2A\frac{dq}{dt} + (A-C)p\,r = Fy'\gamma_3'\sin\phi;$$
$$C\frac{dr}{dt} + A\,p\,q = -Fy'(\gamma_2'\sin\phi - \gamma_1'\cos\phi),$$

где $\gamma_1' = \cos\theta\sin\phi$, $\gamma_2' = \cos\theta\cos\phi$, $\gamma_3' = -\sin\theta$ – направляющие косинусы силы $\vec{F}$ переменного направления; $y'$ – алгебраическое значение радиус-вектора точки приложения силы. Для решения задачи к динамическим уравнениям Эйлера присоединяют кинематические уравнения или уравнения Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,$$
$$\frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,$$
$$\frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2;$$
$$\frac{d\gamma_1'}{dt} = r\gamma_2' - q\gamma_3' - \dot{\psi}k_X^0,$$
$$\frac{d\gamma_2'}{dt} = p\gamma_3' - r\gamma_1' - \dot{\psi}k_Y^0,$$
$$\frac{d\gamma_3'}{dt} = q\gamma_1' - p\gamma_2' - \dot{\psi}k_Z^0,$$

где $\dot{\psi}$ – алгебраическое значение угловой скорости прецессии; $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ – направляющие косинусы силы тяжести; $k_X^0, k_Y^0, k_Z^0$ – проекции единичного вектора линии узлов на оси подвижной системы координат.

В случае движения тяжёлого твёрдого тела переменной массы под действием силы переменного направления для получения интеграла энергии необходимо наложить следующее ограничение $2Fy' = \text{const}$. .

Интеграл энергии при выполнении данного условия принимает вид

$$A(p^2 + 2q^2) + Cr^2 = 2Fy'\gamma_3 + \text{const}.$$

Тривиальный интеграл можно записать

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

или $$(\gamma_1^э)^2 + (\gamma_2^э)^2 + (\gamma_3^э)^2 = 1.$$

Из теоремы об изменении кинетического момента получаем ещё один первый интеграл

$$Ap\gamma_1 + 2Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}.$$

Последний первый интеграл в общем случае получить не удаётся.

**Список литературы**

1. Сапа В.А., Трацевская Ю.П. К вопросу о движении твердого тела переменной массы с закрепленной точкой // Вопросы дифференциальных уравнений в механике горных пород. – АН КазССР, 1963.

2. Бочковая Л.Ф. Об одном интегрируемом случае уравнений движения тела переменной массы с одной закреплённой точкой // Динамика твёрдого тела. – Алма-Ата, 1988.