УДК 372.851

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

[1]Рахымбек Д., [1]Юнусов А.А., [2]Юнусова А.А.,[1]Айтбаева Н.Ж.

[1]Южно-казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова, Шымкент, e-mail: altyn_79@mail.ru;

[2]Казахская академия транспорта и коммуникации имени М. Тынышпаева, Алматы, e-mail: yunusov1951@mail.ru

Одним из путей повышения активизации учащихся и их развития является обучения различным методам и способам геометрических задач на доказательства. Отыскание приемов учебной работы, которые способствуют формированию у учащихся умение находить самостоятельно способов доказательства в статье разработано таблицы, которыми учащихся пользовались при поисках доказательств отдельных тезисов. Пользуясь этими дидактическими средствами ученики находят способы доказательства. Этому будет способствовать приведенные образцы поиска, способы доказательства представляющего собой рассуждения воображаемого ученика. Приведены примеры решения различными способами решения геометрических задач на доказательство.

Ключевые слова: методика математики, способы решения задач, школьная математика, самостоятельность, геометрические задачи, различные способы доказательства, активизация, познавательной деятельности

METHODS OF TEACHING IN THE SOLUTION OF GEOMETRICAL TASKS ON THE PROOF IN VARIOUS WAYS

[1]Rahimbek D., [1] Yunusov A.A., [2]Yunusova A.A., [1]Aitbayeva N.J.

[1]South-Kazakhstan State University n.a M. Auezov, Shymkent city, e-mail: altyn_79@mail.ru;

[2]Kazakh Academy of transport and communication n.a M. Tynyshpaeva, Almaty, e-mail: yunusov1951@mail.ru

One way to increase activation of the students and their development is learning the various techniques and methods of geometric problems on proofs. The search for methods of training, which contribute to the development of students' ability to find their own methods of proof, was developed in the article into a table which students used in the search for evidence of individual abstracts. Using these didactic tools, students find ways of proofs. It will be promoted by the given models of search, ways of the proof, representing reasoning of the imagined student. Examples of the solution of geometrical tasks on the proof are given in the various ways.

Keywords: Mathematics technique, ways of the solution of tasks, school mathematics, independence, geometrical tasks, various ways of the proof, activization, informative activity

Обучать математике это и есть обучения учащихся решению задач. Задача является средством усвоения и контроля достижение математических знании, умении и навыков, а также основным средством активизации и развития учащихся. Составной частью умения решать задачи является умение вести поиск, которое определяет уровень математической подготовленности школьника. Поэтому обучения поиску способов решения математических задач и организация учебно-познавательного процесса учащихся всегда был и остается актуальной проблемой. Важность проблемы определяется современной тенденцией всестороннего развития личности учащихся, нацеливающие на создание условий для саморазвития, самоопределения и активизации когнитивной деятельности школьников в процессе познания.

В методике обучения математике исследование проблемы поиска решения задач получило широкое развитие в работах Д Пойа (George Polya) [8], где с помощью системы правил, советов, указаний предлагалось побудить учащихся к самостоятельному поиску способа решения задачи. В русле данного направления можно выделить мотивационный аспект поиска и различные аспекты решения проблемы формирование эвристических приемов (E. Bono [1], М.А. Родионов [6], Л.М. Фридман [10]), обучение общим и специальным приемам поиска доказательства (Э.Г. Готман, З.А. Скопец [2], В.А. Далингер [4], А.И. Мостовой [5], Г.И. Саранцев [9]), формирование исследовательских умений и обучение аналитико-синтетическим умениям вести поиск (В.А. Гусев [3],), методологические основы поиска (И. Лакатос (Lakatos I.) [7] ,) В работах этих авторов заложены общие методологические положения'нашей работы: определения понятия математических задача и их классификация, методы решения математических задач, идея единства логической и эвристической составляющих деятельности, идея единства методов анализа и синтеза и др. Результаты этих исследований выступают фундаментом для нашей работы в осуществлений обучения решению задач.

Школьная практика традиционно свидетельствует о низком уровне умения школьников решать задачи, формализме в знаниях, стремлении школьников запомнить приведенные рассуждения. Большинство учащихся, даже физико-математических школ и классов, затрудняются в осуществлении поиска решения, требующих эвристических рассуждений. В качестве наиболее вероятной причины трудностей в обучении поиску способа решения задачи учащихся школы следует считать несовершенство традиционной методики, которая не учитывает структуру и функции поиска, не рассматривает всех его аспектов.

В этой статье мы поставили цель поделится со своими опытом методикой обучения поиску решения задачи на доказательства с различными способами и их реализации на уроках планиметрии.

Опыт организация поиску и решения задач на доказательства различными способами.

В работе А.И. Мостовой [5] убедительно доказывается, что одним из путей активизации познавательной деятельности учащихся является обучении различным способам решения геометрических задач.

Обучения учащихся решение геометрических задач различными способами и методами дает возможность:

– привить интерес к изучаемому предмету;

– пробуждать их к более вдумчивому изучению геометрию;

– развития критического и математического мышления;

– полнее исследовать свойства геометрических фигур;

– подметить свойство, о котором в задаче ничего не говорится;

– получить интересное обобщение задачи и др.

Важно и то, что, придя разными путями к одному и тому же результату у учащихся прививается уверенность в правильности решения.

Решить задачу, несколькими способами – увлекательная занятия, требующая знание всех разделов школьной математики.

Решение одной задачи несколькими способами и методами полезно чем решение нескольких задач одним способом [2].

При отыскании различных способов решения задач учащихся испытывают затруднения в выборе подходящих аргументов обоснования решения. В общем запас ране изученных истинных суждении, хранящихся в пмяти, школьники не всегда умеют находит необходимые аргументы. Поэтому перед нами встала задача отыскание таких приемов учебной работы, которые способствуют формированию у учащихся умение находить названные способы решения задач самостоятельно.

С этой целью мы разработали таблиц, которыми учащихся пользовались при поисках доказательств отдельных тезисов.

В основу построения таблицы мы положили аналогичную таблицу Д. Пойа «Как решать залачу» [8]. Таблица содержала такие пункты:

№ п/п	Содержание
1	Прочти внимательно теорему или задачу на доказательство.
2	Сделай соответствующий условию чертеж.
3	Отметь на чертеже данные.
4	Запиши условие.
5	Запиши заключение.
6	Всесторонне обдумай заключение. Нельзя ли его перефразировать, не изменяя смысла, попробуй сопоставить его с другими (тебе известными) положениями.
7	Предположим, что утверждение истинно.
8	Попытайся найти связь между заключением и условием. Если эту связь непосредственно установить нельзя, попробуй установить ее посредством других (ране известных тебе) положений.
9	Если и после этого установить связь затрудняешься, то попытайся, согласно предположению истинности заключения, сделать дополнительное построению
10	Снова продумай пункт 8.
11	Найденную последовательность взаимосвязи между положениями выпиши отдельно. При этом запись должна увязывать положения, начиная с неизвестного (заключения), с другими положениями и следовать до известного (условия).
12	Попробуй теперь вести рассуждения с конца выписанной тобой взаимосвязи. Эти рассуждения должны привести к доказательству.
13	Докажи тезис самостоятельно.
14	Попытайся снова рассуждать по пунктам приведённой таблицы, только теперь для доказательства применяй другие известные тебе положения.
15	Докажи тезис вторым способом и т.д.

Вторая таблица содержала такие истинные суждения:

№ п/п	Условия	Обоснование
1	Чтобы установить равенство отрезков,	можно, доказав: а) что они имеют одинаковую длину; б) что они являются соответствен-ными сторонами равных фигур и т.д.
2	Чтобы установить равенство углов,	можно, доказав: а) что они имеют одинаковую угловую меру; б) что они являются соответственными углами равных или подобных фигур и т.д.
3	Чтобы установить, что прямые параллельные между собой,	можно, доказав: а) что обе прямые перпендикулярны к третьей прямой; б) что каждая из них порознь параллельна третьей прямой и т.д.
4	Чтобы установить, что две прямые взаимно перпендикулярны,	можно, доказав: а) что они образуют равные смежные углы; б) что они являются биссектрисами двух смежных углов и т.д.

Такой перечень был у каждого учащегося. Он постепенно составляется коллективом класса, причем работа эта выполнялась на ходу изучения учебного материала: каждый новый способ обоснования равенства отрезков или углов, а также параллельности или перпендикулярности прямых заносился в тетрадь после применения его при изучении той или иной теоремы.

Однако мы не ограничились только составлением этих двух таблиц. Кроме названного дидактического материала, в классе, в учебных целях, был вывешен образец поиска способов доказательства.

Для этого мы выбрали задачу: «Если в треугольнике медиана вдвое меньше стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный. Доказать».

Начав думать над задачей, учащиеся поптаются вспомнить ранее изученные положения, в которых говорится о перпендикулярности. Им может прийти на память задача об угле между биссектрисами смежных углов. Перебирая в памяти теоремы, они могут обратить внимание на теорему, выражающую свойство углов при основании равнобедренного треугольника. Приняв эти два суждения в качестве оснований, они могут прийти к оригинальному способу доказательства. Этому будет способствовать и образец поиска, представляющего собой рассуждения воображаемого ученика.

1-й способ доказательства.

1. Я внимательно читаю условие задачи (далее следует текст задачи).

2. Выполняю чертёж треугольника, у которого медиана равна половине соответствующей стороны:

$$CD = \frac{1}{2}\,AB.$$

3. Отмечаю на рисунке данные: равенство отрезков $AD = CD = BD$.

4. Записываю условие:

$$CD = \frac{1}{2}AB, \quad AD = BD.$$

5. Записываю заключение: ΔABC – прямоугольный.

6. Заключение можно записывать и так:

$$\angle ACB = 90^\circ\ (AC \perp BD).$$

Начинаю думать над условием перпендикулярности двух прямых. Подбираю подходящие условия. Установить, что две прямые взаимно перпендикулярны можно, доказав (перебираю) в памяти изученные теоремы, обращаюсь ко второй таблице, вспоминаю ранее решённые задачи, пытаюсь применить их, что они являются биссектрисами двух смежных углов.

7. Предполагаю, что CA и CB – биссектрисы двух смежных углов.

8. Так как смежных углов при вершине C нет, то и связь устанавливать нет смысла.

9. Выполняю дополнительное построение: провожу через вершину C прямую MN (рис.1). Это делаю с той целью, чтобы образовались два смежных угла, биссектрисами которых были бы CA и CB.

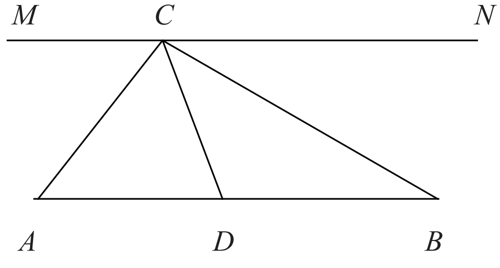

Рис. 1

Возвращаюсь к пункту 8 таблицы и пытаюсь установить взаимосвязь между заключением и условием задачи. Так как *CA* и *CB* биссектрисы двух смежных углов $\angle MCD$ и $\angle DCN$, то $\angle ACD = \angle ACM$, а $\angle BCD = \angle BCN$, но $\angle ACD = \angle A$, а $\angle BCD = \angle B$ (как углы при основании равнобедренных треугольников *ACD, BCD*). Из того, что $\angle CAD = \angle ACM$ и $\angle ACD = \angle A$ следует, что $\angle A = \angle ACM$. Аналогично устанавливаю, что $\angle B = \angle BCN$. Так как полупрямые *CM* и *AD* находятся в разных полуплоскостях относительно прямой *ACAC*, то углы $\angle A$ и $\angle ACM$ внутренние накрест лежащие, аналогично внутренними накрест лежащими будут и углы $\angle B$ и $\angle BCN$. Но равенства $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCN$ будут, в частности, истинными тогда, когда $MN \| AB$.

Выписываю последовательность установленных отношений. $\angle ACD = \angle ACM$, а $\angle BCD = \angle BCN$ (биссектрисы делят углы пополам); $\angle ACD = \angle A$, а $\angle BCD = \angle B$ (углы при основании равнобедренных треугольников); $\angle ACM = \angle A$ а $\angle BCN = \angle B$ (две величины, порознь равные третьей величине, равны между собой); $MN \| AB$ (признак параллельности прямых).

Веду рассуждения с конца. Через вершину *C* треугольника *ABC* провожу прямую *MN*, параллельную стороне *AB*. Получаю $\angle ACM = \angle A$ а $\angle BCN = \angle B$, как накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой. Но $\angle A = \angle ACD$, а $\angle B$ и $\angle BCD$, как углы при основании равнобедренных треугольников *ADC* и *BDC*. Из того, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle A = \angle ACD$ $\angle A = \angle ACD$ следует, $\angle ACM = \angle ACD$. Аналогично доказываю, что $\angle BCD = \angle BCN$. Следовательно, *CA* и *CB* являются биссектрисами двух смежных углов, то есть они взаимно перпендикулярны.

Символическая запись:

1) $AB \| MN$ (рис.1)

2) $$\left.\begin{array}{l} AB \parallel MN \Rightarrow \angle ACM = \angle A \\ \Delta ADC(AD = DC) \Rightarrow \angle ACD = \angle A \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACM = \angle ACD \Rightarrow CA - \text{биссектриса } \angle MCD;$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel MN \Rightarrow \angle BCN = \angle B \\ \Delta BDC(BD = DC) \Rightarrow \angle BCD = \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCN = \angle BCD \Rightarrow CB - \text{биссектриса } \angle NCD.$$

3) $\angle MCD$ и $\angle MCD$ – смежные углы $\Rightarrow$ CA⊥CB.

Один способ доказательства найден. Приступаю к отысканию второго способа доказательства и т.д.

В данном случае применён приём формирования умений доказывать суждения различными способами в эвристической форме, когда учителем предложена система целесообразно составленных и определённым образом расположенных вопросов, на которые учащиеся должны дать ответы, постепенно раскрывающие способы доказательства некоторого суждения. «Инвентарём» этого приёма явился дидактический материал – таблицы. Педагогическая сторона этого приёма выражена непосредственной структурой организации учебного процесса. С точки зрения психологии мы характеризуем этот приём как завершённую обобщением аналитико–синтетическую умственную деятельность школьника.

В данном случае педагог, учитывая особенности психологической деятельности учащихся, как бы создал динамическую модель образа мышления, которая своеобразно отразилась в сознании учащихся.

Особо укажем на положительную роль второй таблицы. Она представляет собой «мостик» между ранее изученными знаниями и сформулированной проблемной задачей. Неоднократно совершая мыслительные «путешествия» по этому «мостику», учащиеся не только отыскивают ключ к решению задачи, но и запечатлевают в своей памяти многие ранее изученные положения, отмечают их прикладную роль, и все это вместе взятое формирует у них своеобразные умения и навыки в решении проблемных задач. Характерным здесь является то, что важную роль при этом играет сам процесс приобретения знаний. Он представляет собой самостоятельную творческую деятельность учащихся по добыванию знаний. А это в свою очередь способствует активизации сознательной деятельности учащихся.

2-й способ.

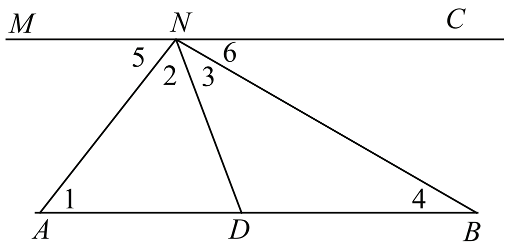

Рис. 2

Проводим $MN \| AC$ (рис.2).

1) $\left.\begin{aligned}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 1 = \angle 5\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 5;$

$\left.\begin{aligned}\angle 4 = \angle 3\\ \angle 4 = \angle 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 6.$

2) $\angle 5+\angle 2+\angle 3+\angle 6 = 180^{\circ}$.

$2(\angle 2+\angle 3) = 180^{\circ}$.

$\angle 2+\angle 3 = 90^{\circ} \Rightarrow \angle C = 90^{\circ} \Rightarrow AC \perp CB$.

Поскольку эта задача обычно помещена в разделе о сумме углов треугольника, естественно потребовать от учащихся решить её, опираясь на теоретические положения этого раздела.

3-й способ.

$\angle A+\angle C+\angle B = \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4 =$
$=2(\angle 2+\angle 3) = 2\angle C = 180^{\circ}$.
$\angle C = 90^{\circ} \Rightarrow AC \perp CB$.

Чтобы учащимся сопутствовал успех, им можно порекомендовать воспользоваться теоремой «Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол».

4-й способ.

Отметим на луче AC точку F, тогда $\angle FCB = \angle A + \angle B$ – свойство внешнего угла треугольника. Но $\angle A = \angle ACD$, а $\angle B$ и $\angle BCD$, следовательно

$$\angle A + \angle B = \angle ACD + \angle BCD = \angle ACB.$$

Итак, $\angle FCB = \angle ACB = \angle A + \angle B$, т.е. $\angle ACB = 90^{\circ}$.

В только что разобранном способе доказательства было установлено, что $\angle ACB = \angle A + \angle B$. Но $\angle ACB = \angle A + \angle B =$ $= 180^{\circ}$, т.е. $2\angle ACB = 180^{\circ}$ и $\angle ACB = 90^{\circ}$. Это также своеобразный **5-й способ** доказательства.

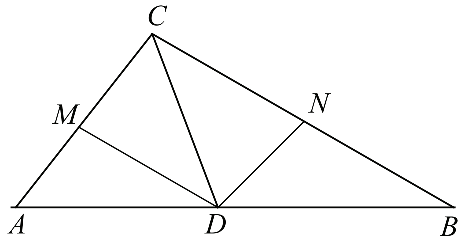

Рис. 3

6-й способ.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 3) CD – медиана и

$$CD = \frac{1}{2} AB,$$

т.е. $CD = AD = BD$ Проведем DN – медиану равнобедренного треугольника BCD и DM – медиану равнобедренного треугольника BCD. Эти медианы будут и биссектрисами и высотами. Следовательно, $\angle DNC = \angle MDN = \angle DMC = 90^{\circ}$. Так как $\angle NDM + \angle DMC = 180^{\circ}$, то $DN \parallel MC$, а из того, что $DN \parallel MC$ и $\angle DNC = 90^{\circ}$ следует перпендикулярность прямых MC и CN.

7-й способ.

Опираясь на свойство угла между биссектрисами смежных углов и на признак параллельности прямых, учащиеся могут прийти еще к одному способу доказательства. Разберем его.

Проведем через точку C прямую MN, параллельную прямой AB. То $\angle DBC = \angle NCB$. Но $\angle DBC = \angle BCD$ – как углы при основании равнобедренного треугольника, следовательно $\angle NCB = \angle BCD$, а $\angle ACD = \angle ACM$ следует, что $\angle ACB = 90^{\circ}$.

Эту задачу можно решить многим другими способами, опираясь на теоретический материал 8 и 9 классов. Поэтому полезно заставить учащихся думать над нею длительное время (в ,7, 8 и 9 классах).

Задача. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

Рассмотрим три способа доказательства. Они посильны семиклассникам.

1-й способ. Пусть в треугольнике ABC $AC = BC$, $\angle BCD$ – внешний угол и $\angle DCF = \angle BCF$. $\angle BCD = \angle A + \angle B$, но $\angle BCD = 2\angle BCF$, (по условию), а $\angle A + \angle B$, поэтому $\angle A + \angle B = 2\angle B$ и тогда $2\angle BCF = 2\angle B$, т.е. $\angle BCF = \angle B$. Но углы $\angle BCF$ и $\angle B$ внутренние накрест лежащие, так как точки A и F лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, поэтому $CF \perp AB$.

2-й способ. Пусть точка E является серединой стороны AB. Тогда медиана CE будет и биссектрисой и высотой равнобедренного треугольника (свойство медиана равнобедренного треугольника). А раз так, то $CE \perp AB$. Пришли к тому, что к прямой CE проведены два перпендикуляра $CF \perp CE$ и $CE \perp AB$), поэтому $CF \perp AB$.

3-й способ. На продолжении AC отложим $CD = AC$ (аксиома откладывания отрезков) и точку D соединим отрезком с точкой B. В треугольнике ABD

$$CB = \frac{1}{2} AB,$$

поэтому $\angle ABD = 90^{\circ}$. В равнобедренном треугольнике BCD CF биссектриса, проведенная из вершины, противолежащей основанию. Она является и высотой, $CF \perp BD$. Пришли к тому, что $CF \perp BD$ и $AB \perp BD$, следовательно $CF \perp AB$.

Заключение

При решения задач на доказательства различными способами применяются комплекс ранее полученных знаний и в результате происходить процесс систематизации усвоенных учащимися знаний, умений и навыков. При решении задачи различными способами у ученика формируется аналитический и синтетический деятельность. На уроках решения одной задачи различными способами развиваются исследовательские деятельности учащихся. Решение задачи различными способами – это увлекательный творческий процесс, развивающий воображение, подталкивающий учащегося придумывать, искать все новые и новые решения задачи. Поиски различных способов решения задач на доказательства, сформируют у учащихся способность критического оценка свой деятельности, развивает навыки самоконтроля. Выбор наиболее рационального способа доказательства важный фактор развития математического мышления. Решение задач на доказательства различными способами воспитывает интерес у учащихся к изучаемому предмету.

Опыт работы в школе показывает, что систематическое применение этого приёма даёт значительный эффект как при обучении решению задач по геометрии, так и при обучении курсу математики в целом. Обучение математике необходимо не только затем, чтобы учащиеся овладели только определённой суммой знаний, главное, чтобы эти знания они могли эффективно использовать для решения разнообразных задач, возникающих в практической деятельности.

Список литературы

1. Bono, E. Lateral Thinking (A Textbook of Creativity). – London. – Penguin Books, 1990.

2. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решение разные: Геометрические задачи: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 2000. – 224 с.

3. Гусев В.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: учеб. пособие для вузов / В.А. Гусев. – М.: Дрофа, 2010. – 473 с.

4. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кн. для учителя / В.А. Далингер. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с

5. Мостовой А. И. Вопросы активизации обучения геометрии в восьмилетней школе /А.И. Мостовой. – Алма-Ата: КазПИ им. Абая, 1976.– 103 с.

6. Родионов, М.А. Фомирование поисковой мотивации в процессе обучения математике: учебное пособие для студентов и учителей /М.А. Радионов. – Пенза: ПГПУ, 2001.

7. Лакатос И. Доказательство и опровержения: Как доказываются теоремы /И.Лакатос. – М.: Наука, 1967.

8. Пойа, Д. Как решать залачу /Д. Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

9. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе /Г.И. Саранцев. – М.: ВЛАДОС, 2006. – 183 с.

10. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике /Л.М. Фридман. – М.: Московский психолого-социальный иниститут: Флинта ,1998. – 224 с.