УДК 517.518

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

[1]Нахман А.Д., [2]Осиленкер Б.П.

[1]ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», e-mail: alextmb@mail.ru;

[2]НИУ «Московский государственный строительный университет», Москва, e-mail: b_osilenker@mail.ru

Изучено поведение семейства операторов $f \mapsto U_h(f)$, определяемых экспоненциальными методами суммирования $\lambda_k(h) = \exp(-hu^\alpha(|k|)),\ k = 0, \pm 1, \ldots,\ \alpha > 0$. При некоторых условиях на функцию $u \in C^2(0, +\infty)$ установлена сходимость $U_h(f) \to f\ (h \to +0)$ в каждой точке Лебега.

Ключевые слова: выпуклые, кусочно-выпуклые последовательности, линейные средние рядов Фурье, сходимость в точках Лебега

EXPONENTIAL MEANS OF FOURIER SERIES AND THEIR APPLICATION TO THE DECISION OF GENERALIZED DIRICHLET PROBLEM

[1]Nakhman A.D., [2]Osilenker B.P.

[1]Tambov State Technical University, Tambove-mail:alextmb@mail.ru;

[2]National Research University Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, e-mail: b_osilenker@mail.ru

The behaviour of family of operators $f \mapsto U_h(f)$ defined by methods of summation $\lambda_k(h) = \exp(-hu^\alpha(|k|)),\ k = 0, \pm 1, \ldots,\ \alpha > 0$. is studied. At some conditions on function $u \in C^2(0, +\infty)$ the convergence $U_h(f) \to f\ (h \to +0)$ in each Lebesque point is established.

Keywords: convex, piecewise -convex sequences, linear means of Fourier series, convergence in Lebesque points

Пусть $L_{2\pi}$ – класс 2 π-периодических суммируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, C2π – класс 2 π-периодических непрерывных функций, $C^2(0, +\infty)$ – класс функций, обладающих непрерывными на $(0, +\infty)$ вторыми производными. В настоящей работе рассматриваются экспоненциальные средние

$$U_h(f) = U(f, x; u, \alpha; h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-hu^\alpha(|k|)) c_k(f) \exp(ikx) \quad (1.1)$$

рядов Фурье функций $f \in L_{2\pi}$. В определении (1.1)

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt)\, dt, \quad (1.2)$$

– коэффициенты Фурье функции f, $\alpha > 0$ – произвольный фиксированный параметр, функция $u \in C^2(0, +\infty)$ принимает положительные значения, $u(0) = 0$.

Одна из основных задач, рассматриваемых в настоящей работе – изучение поведения семейства операторов $f \mapsto U_h(f)$ при $h \to +0$. А именно, мы будем изучать сходимость (1.1) в точках Лебега, т.е. в точках x, обладающих свойством

$$\int_{-\eta}^{\eta} |f(x+t) - f(x)|\, dt = o(\eta), \ \ \eta \to +0.$$

Точки Лебега, как известно ([1], с. 111), расположены почти всюду для каждой $f \in L_{2\pi}$.

Частными случаями (1.1) являются

1) решение

$$U(f, x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-ta^2k^2)) b_k(f) \sin kx$$

задачи теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x},$$

$$U(0, t) = U(\pi, t) = 0,\ U(x, 0) = f(x)$$

в стержне длины π с постоянным коэффициентом температуропроводности a^2 (t>0 – время протекания процесса, $f = f(x)$ – заданное распределение начальных температур, $b_k(f)$ – синус-коэффициенты Фурье функции *f*);

2) решение

$$U(f,x;h)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-h|k|)c_k(f)\exp(ikx) \quad (1.3)$$

задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 h}=0,\ U(f,x;0)=f(x)$$

в полуплоскости (нахождение стационарного распределения температур в точках $(x,h),\ h>0$ с заданной на границе $h=0$ температурой $f=f(x)$). Операторы, определяемые соотношением (1.3) известны как средние Пуассона-Абеля ([1], с. 160-165) и играют значительную роль в различных вопросах анализа. Однако, не до конца изучено ([2]) даже наиболее простое и естественное обобщение

$$U(f,x;\alpha;h)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-h|k|^{\alpha})c_k(f)\exp(ikx) \quad (1.4)$$

средних (1.3) на случай любого $\alpha>0$. Речь идет, в частности, об (1.4) как решении обобщенной задачи Дирихле в полуплоскости

$$i^{2-2\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}U}{\partial^{2\alpha}x}+\frac{\partial^2 U}{\partial^2 h}=0,$$

$$U(f,x;\alpha;0)=f(x), \quad (1.5)$$

где дифференцирование по *x* есть соответствующее дробное дифференцирование, а (1.5) понимается как предельное соотношение

$$\lim_{h\to+0}U(f,x;\alpha;h)=f(x) \quad (1.6)$$

(характер сходимости обсуждается ниже).

2. Основной результат

Теорема 2.1.

Пусть $f\in L_{2\pi}$ и при каждом *h*>0

$$\exp(-h\cdot u^{\alpha}(x))\ln x=O(1),\quad x\to+\infty. \quad (1.7)$$

1) Если $u''(x)<0$ при всех $x\in(0,+\infty)$ и $0<\alpha\le1$, то соотношение

$$\lim_{h\to+0}U(f,x;\,u,\alpha;h)=f(x) \quad (1.8)$$

имеет место в каждой точке Лебега функции *f* и равномерно по x для всякой $f\in \mathbf{C}_{2p}$.

2) Результат (1.8) сохраняется для $\alpha>1$, если (в дополнение к (1.7)) существует постоянная $C=C_{u,\alpha}$, такая, что при всех $h>0,\ x\in(1,+\infty)$

$$xh\,\exp(-h\cdot u^{\alpha}(x))u^{\alpha-1}(x)\,|\,x'(u)|\le C_{u,\alpha}, \quad (1.9)$$

и функция

$$V=V(x)=\alpha h u^{\alpha}\cdot(u')^2-(\alpha-1)(u')^2-u\cdot u'',\ \alpha>0 \quad (1.10)$$

имеет на $(0,+\infty)$ конечное число нулей.

3. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим бесконечную произвольную последовательность

$$\Lambda=\{\lambda_k(h),\ k=0,1,...\}, \quad (2.1)$$

определяемую значениями параметра *h*>0, и соответствующее семейство линейных средних ряда Фурье произвольной $f\in L_{2\pi}$

$$U_h(f)=U(f,x;\lambda,h)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{|k|}(h)c_k(f)\exp(ikx).$$

Последовательность (2.1) называется выпуклой (вогнутой), если

$$\Delta_k^2=\Delta^2\lambda_k(h)\ge0 \quad (\Delta_k^2\le0),$$

где $\Delta_k^2=\Delta_k-\Delta_{k+1}$, $\Delta_k=\Delta\lambda_k=\lambda_k(h)-\lambda_{k+1}(h),\ k=0,1,...$

Последовательность (2.1) кусочно-выпукла, если Δ_k^2 меняет свой знак конечное число раз, $k=0,1,...$ Поведение линейных средних рядов Фурье, определяемых выпуклыми конечными последовательности изучались в работе С.М. Никольского [3]. В следующем утверждении (имеющем и самостоятельный интерес) некоторые результаты [3] распространяются на «полунепрерывный» случай (2.1).

Лемма 2.1. Пусть последовательность (2.1) выпукла (вогнута) и при каждом $h>0$ ее члены удовлетворяют условиям

$$\lambda_0(h)=1,\ \lim_{h\to0}\lambda_k(h)=1,\ k=0,1,... \quad (2.2)$$

и

$$\lambda_k(h) = O\left(\frac{1}{\ln k}\right),\ k \to \infty. \qquad (2.3)$$

Тогда соотношение

$$\lim_{h\to 0}(U, f;\, x, \lambda)\, h \;=\; f(x) \qquad (2.4)$$

имеет место в каждой точке Лебега функции f и равномерно по x для всякой $f \in C_{2p}$.

Утверждение сохраняется, если последовательность (2.1) кусочно-выпукла, выполнено условие (2.3) и существует постоянная C (зависящая лишь от λ) такая, что при всех $h > 0,\ k = 1, 2, \ldots$

$$|\lambda_k(h)| + k\,|\Delta\lambda_k(h)| \le C\,. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Пусть

$$\phi_x(t) = f(x+t) - f(x)\,.$$

Воспользовавшись интегральной формой (1.1) коэффициентов Фурье и преобразованием Абеля ([1], с.15), запишем

$$U(f, x; \lambda, h) - f(x) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - f(x))\{\frac{\lambda_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{N}\lambda_k(h)\cos k(x-t)\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left\{\lambda_N(h)\int_{-\pi}^{\pi}\phi_x(t)D_N(t)\,dt + N\Delta\lambda_{N-1}(h)\int_{-\pi}^{\pi}\phi_x(t)F_{N-1}(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{N-2}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h)\int_{-\pi}^{\pi}\phi_x(t)F_k(t)\,dt\right\}, \qquad (2.6)$$

где

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} \text{ и } F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}D_k(t) = \frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2(k+1)\sin^2\frac{1}{2}t}$$

– соответственно, ядро Дирихле и ядро Фейера ([1], с.86, 148). Согласно классическим результатам ([1], с.113, 151) для любого $\varepsilon > 0$ в каждой точке Лебега имеют место соотношения

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\phi_x(t)D_k(t)dt\right| \le C\varepsilon\ln k \text{ и } \left|\int_{-\pi}^{\pi}\phi_x(t)F_k(t)\,dt\right| \le \varepsilon$$

при всех значениях k, больших некоторого $\nu = \nu(\varepsilon, x)$; постоянная C в первом из неравенств не зависит от k. Учитывая (2.3), очевидные оценки $|D_k(t)| \le k+1$ и $F_k(t) \le k+1$ и считая, что $N-1 > \nu$ в (2.5), получим теперь, что модуль выражения, записанного под знаком предела в (2.6), не превосходит суммы

$$C\varepsilon + \left|N\Delta\lambda_{N-1}(h)\right|\varepsilon + \sum_{k=0}^{\nu}(k+1)^2\,|\Delta^2\lambda_k(h)|\int_{-\pi}^{\pi}|\phi_x(t)|dt + \varepsilon\sum_{k=\nu+1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_k(h)|. \qquad (2.7)$$

Далее, согласно (2.2), $\Delta^2\lambda_k(h) \to 0$ при $h \to +0$ и $k = 0, 1, \ldots, \nu$. Кроме того, для выпуклой последовательности при каждом $h > 0$ имеют место соотношения ([1], с. 155-156)

$$\lambda_N(h) = o(1)\,, \quad N\Delta\lambda_N(h) = o(1) \text{ при } N \to +\infty \qquad (2.8)$$

и (в силу преобразования Абеля)

$$\sum_{k=m}^{n}(k+1)\Delta^2\lambda_k(h) = \lambda_{m+1}(h) - \lambda_{n+1}(h) + (m_m+1)\Delta\,\lambda\,(h) - (n+1)\Delta\lambda_{n+1}(h); \qquad (2.9)$$

в (2.8) т и п – любые натуральные числа, причем $m<n$

В частности, согласно (2.9), (2.3) и (2.8)

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|=\lim_{n\to\infty}\big(\lambda_{\nu+2}(h)-\lambda_{n+1}(h)+(\nu+2)\Delta\lambda_{\nu+1}(h)-(n+1)\Delta\lambda_{n+1}(h)\big)=$$

$$=\lambda_{\nu+2}(h)+(\nu+2)\Delta\lambda_{\nu+1}(h),$$

и теперь из (2.6) вытекает, что

$$\lim_{h\to 0}\left|U(f,x;\lambda,h)-f(x)\right|\le C\varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности ε, и следует выполнимость соотношения (2.4) в каждой точке Лебега.

Далее, согласно преобразованиям типа (2.6) и соотношениям (2.3), (2.8), (2.9) для нормы $\|U_h\|$ каждого из операторов $U_h: f\mapsto U_h(f)$, действующего из C_{2p} в C_{2p} справедлива оценка

$$\|U_h\|=\sup_{f:\ \|f\|\le 1}\|U_h(f)\|\le$$

$$\le C\sup_{k=2,3,\dots}\left(\frac{1}{\ln k}\int_{-\pi}^{\pi}|D_k(t)|\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}|F_k(t)|\,dt\right)\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k(h)\,|\right)\le C,$$

где постоянная C зависит лишь от l. Следовательно, равномерная по x сходимость (2.4) имеет место в силу теоремы Банаха-Штейнгауза.

Если же последовательность L кусочно-выпукла, так что $\Delta^2\lambda_k(h)$ сохраняет свой знак при $m\le k\le n$ для некоторых натуральных m и n, то сумма $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k(h)|$ равна конечному числу (числу перемен знаков последовательности $\{\Delta^2\lambda_k(h)\}$) блоков-слагаемых, каждый из которых имеет вид (2.9); преобразование суммы (2.9) с $n=+\infty$ предполагает использование соотношения (2.8). Остается применить к полученным слагаемым оценку (2.5) и повторить рассуждения, использованные в случае выпуклой (вогнутой) последовательности (2.1). Лемма полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2.1. Пусть теперь

$$\lambda(x,h)=\exp(-h\,u^{\alpha}(x)),\ \lambda_0(h)=1,\ \lambda_k(h)=\lambda(x,h)|_{x=k},\quad k=1,2,\dots \tag{4.1}$$

В этом случае, согласно (4.1),

$$\lambda''_{xx}(x,h)=\alpha h\exp(-hu^{\alpha}(x))u^{\alpha-2}(x)V(x), \tag{4.2}$$

где $V(x)$ определена соотношением (1.10).

Если $u''(x)<0$ и $0<\alpha\le 1$, то согласно (4.2), последовательность (4.1), оказывается выпуклой, а значит, к ней применима лемма 3.1; при этом условие (2.3) выполнено в виде (1.7). Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Для доказательства второй части заметим, прежде всего, что сформулированное условие на функцию $V(x)$ в (1.10) обеспечивают кусочную выпуклость последовательности (4.1). Действительно, пусть, например, $V(x)$ знакопостоянна при $m\le x\le n+2$ (т и п – некоторые неотрицательные целые числа). Применим к $\lambda(x,h)$, как функции от x, дважды теорему Лагранжа: первый раз на отрезке $[k, k+1]$, так что

$$\Delta\lambda_k(h)=-\lambda'_x\left(k+\theta_1,h\right), \tag{4.3}$$

а второй раз на отрезке $[k+\theta_1,k+2]$:

$$\Delta^2\lambda_k(h)=(1-\theta_1)\lambda''_{xx}\ (k+\theta_1+\theta_2,h), \tag{4.4}$$

где θ_1, $\theta_2\in(0,1)$, $\theta_1=\theta_1(k)$, $\theta_2=\theta_2(k)$. При $m\le k\le n$ будем иметь $m<k+\theta<n+2$, где $\theta=\theta_1+\theta_2$, а значит, вторые разности (4.4) в сумме вида (2.9) будут знакопостоянными. Поскольку число интервалов с целочисленными концами, на которых $V(x)$ знакопостоянна, является конечным, то и $\Delta^2\lambda_k(h)$ имеет конечное число перемен знака. Условие же (1.9) является достаточным (см. (4.3)) для выполнимости соотношения (2.5). Этим и заканчивается доказательство теоремы 2.1.

5. Примеры.

5.1. Пусть $u(x) = \ln x$, так что

$$\lambda_0(h) = 1,\ \lambda(x,h) = \exp(-h\ln^\alpha x),\ x > 0\,.\ (5.1)$$

При этом (см. (2.3)) $\exp(-h\cdot\ln^\alpha x)\ln x = O(1)$, если $x \to +\infty$, в чем можно легко убедиться, применяя правило Лопиталя n раз, где n – наименьшее натуральное число, для которого $1-\nu\alpha \le 0$. Следовательно, при $0<\alpha\le 1$ для случая (5.1) выполнены условия п.1 теоремы 2.1, и, следовательно, справедливо ее утверждение. Если же $\alpha > 1$, то $V(x) = x^{-2}((\alpha h\ln^\alpha x - (\alpha-1) + \ln x)$ и выражение в скобках возрастает с ростом x, а значит, обращается в ноль ровно при одном значении x. Следовательно, соответствующая последовательность (4.1) кусочно-выпукла. Остается проверить, что (см. (2.5), (1.9)) при всех $\alpha > 1$

$$h\exp(-h\cdot\ln^\alpha x)\ln^{\alpha-1}\ C\le x_\alpha$$

что очевидно для $1\le x<2$ и остается справедливым для $x>2$, поскольку функция

$$\frac{1}{\ln x}(h\ln^\alpha x)\ \exp(-h\cdot\ln^\alpha x)$$

ограничена вместе с функцией вида $t\exp(-t),\ t>0.$

Итак, утверждения теоремы 2.1 справедливы для случая (5.1) при всех $\alpha > 0.$ В частности, (случай α=1) сумма ряда

$$c_0(f) + \sum_{1\le|k|<\infty}\frac{1}{k^h}c_k(f)\exp(ikx)$$

при $h\to +0$ стремится к значениям $f(x)$ для почти всех x ($f\in L_{2\pi}$) и равномерно по x в случае $f\in C_{2\pi}$

5.2. Пусть $u(x) = x$, так что

$$\lambda_0(h) = 1,\ \lambda(x,h) = \exp(-hx^\alpha),\ x>0,\ \alpha>0.\ (5.2)$$

В этом случае получаем обобщенные средние Пуассона (1.4); классические средние Пуассона соответствуют случаю $\alpha = 1$ и $h = \ln\frac{1}{r},\ 0<r<1.$

Очевидно, что $\exp(-h\cdot x^\alpha)\ln x = O(1)$, если $x\to+\infty$, т.е. выполнено условие (1.7), а тогда при $0<\alpha\le 1$ для случая (5.2) справедливо утверждение теоремы 2.1. Если же $\alpha>1$, то функция $V(x) = \alpha hx^{\ \alpha} - (\alpha - 1)$ обращается в ноль ровно при одном значении x. Следовательно, соответствующая последовательность (4.1) кусочно-выпукла. Остается проверить, что (см. (2.5), (1.9)) при всех $\alpha > 1$

$$h\exp(-h\cdot x^\alpha)x^\alpha \le C_\alpha,$$

что очевидно, поскольку функция $t\exp(-t)$ ограничена при всех $t>0.$

Следовательно, утверждения теоремы 2.1 справедливы для случая (5.2) при всех $\alpha>0.$ В частности, получаем, что средние (1.4) служат решением обобщенной задачи Дирихле (п. 1), причем граничное условие (1.5) выполняется в виде (1.6) в каждой точке Лебега функции $f\in L_{2\pi}$ и равномерно по x для всякой $f\in C_{2p}$.

Близким к рассмотренному является пример полиномиально-экспоненциального метода суммирования, определяемого (см. (4.1)) функцией

$$\lambda(x,h) = \exp(-h\,P_n(x)),\ x>0,\quad (5.3)$$

где $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a = a_n > 0$ – произвольный многочлен n-й степени, $n = 1,2,\ldots$ Функция $u(x) = P_n(x)$ принимает только положительные значения при достаточно больших x; в частности, существует постоянная C>0, такая, что $|\lambda_k(h)|\le C$ при всех $h>0,\ k=1,2,\ldots$ В силу (5.3) $\lambda''_{xx}(h,x) = \exp(-hP_n(x))\,h\Psi(h,x)$, причем

$$\Psi(h,x) = h(P_n'(x))^2 - P_n''(x).\ (5.4)$$

Многочлен (5.4) имеет степень $2n-2$, так что меняет знак не более $2n-2$ раз. Следовательно, выполнено условие кусочной выпуклости последовательности (4.1).

Проверим условия (1.9). Имеем в левой части (1.9)

$$\pi(x) = \frac{xhP'_n(x)}{\exp(hP_n(x))} = \frac{hP_n(x)}{\exp(hP_n(x))}\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}.\quad (5.5)$$

Здесь дробь $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$, в которой $Q_n(x) = xP'_n(x)$, ограничена, поскольку отношение старших коэффициентов многочленов $Q_n(x)$ $P_n(x)$ равно *n*. Первая же дробь в (5.5) ограничена, поскольку она имеет вид $\frac{t}{\exp t}$, $t > 0$. Следовательно, все произведения (5.5) ограничены некоторой постоянной.

Итак, условия теоремы 2.1 выполнены для полиномиально-экспоненциальных средних, определяемых функцией (5.3), а значит и в этом случае справедливо ее утверждение.

Заметим, что даже частные случаи основного утверждения (п.2) настоящей работы, исследованные в п.5, являются новыми и представляют самостоятельный интерес.

Список литературы

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т.1 / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – 615 с.

2. Nakhman, A.D. Weigted norm inequalities for the convolution operators / A.D. Nakhman // Transactions TSTU. – 2009. – V.15, № 3. – P. 653-660.

3. Никольский, С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С.М. Никольский // Известия АН СССР, сер. матем. – 1948. – № 12. – С.259 –278.