УДК 521.36:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЯХ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ИМЕЕТ ЧИСТО МНИМЫЕ КОРНИ

Турешбаев А.Т., Омарова У.Ш., Аубакирова М.К.

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, г. Кызылорда, Казахстан, e-mail: ylbosin_kz@mail.ru

Рассматривается система автоматического управления второго порядка с нелинейным элементом, моделируемого кубическим членом $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1+\gamma x^3_1$ характеристическое уравнение возмущенного движения которой имеют чисто мнимые корни, что соответствует критическому случаю теории устойчивости. Доказывается устойчивость системы по Ляпунову, а также устойчивость при достаточно больших значениях отклонения. Предложен алгоритм исследования устойчивости системы высокого порядка, у которой характеристическое уравнение имеет бикубический вид.

Ключевые слова: система автоматического управления, характеристическое уравнение возмущенного движения, чисто мнимые корни, устойчивость системы по Ляпунову.

This article describes the system of automatic control of the second order with nonlinear elements which is modeled by cubic term $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1+\gamma x^3_1$ also the characteristic equation of the perturbed motion which has purely imaginary roots, which corresponds to the critical case of theory of stability. The stability of the system by Lyapunov is proved, as well as the stability for sufficiently large values of bias. In this article We propose the algorithm of the studying of high-order system's stability which it's characteristic equation has bicubic view.

Keywords: system of automatic control, characteristic equation of the perturbed motion, purely imaginary roots, stability of the system by Lyapunov.

Как известно, при разработке систем автоматического регулирования одной из важных проблем является обеспечение её работоспособности во время эксплуатации. В зависимости от наличия или отсутствия в системе нелинейных элементов, различают линейные и нелинейные системы автоматического управления. Всякая система автоматического управления, при воздействии на нее различных возмущающих факторов, случайных помех и шумов, должна устойчиво функционировать в соответствии с заданным законом регулирования (управления), обеспечивая необходимые качество и точность регулирования [1, 2]. В связи с этим чрезвычайно важным вопросом является исследование устойчивости заданного режима работы системы. Практически во многих системах требуется поддержание выходных регулируемых величин постоянными или их изменения по заранее заданной программе. Несмотря на существование нескольких методов (частотных, алгебраических и других), методы Ляпунова является фундаментальными и перспективными [1].

Пусть у системы автоматического регулирования отклонения выходной величины от своих заданных значения представлены в виде следующих дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1) + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 , \end{cases} \tag{1}$$

где x_1, x_2 отклонения выходной y и входной x величин от своих заданных значений, $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1+\gamma x^3_1$ - нелинейная функция переменной x_1, a_1- переменный коэффициент, а коэффициенты a_2, b_1 и b_2 – переменные.

Как видно, что система (1) является нелинейной, так как функция $\varphi_1(x_1)$ содержит нелинейный член. Для исследования системы регулирования на устойчивость в первом приближении исходную системы управлений возмущенного движения выпишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

характеристическое уравнение, которой

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь частные случай. Если для системы (2) справедливы условия

$$\begin{gathered} (a_1 + b_2)^2 > 4(a_1 b_2 - a_2 b_1),\ a_1 + b_2 < 0, \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0, \end{gathered} \tag{4}$$

то корни будут вещественны и отрицательны, следовательно имеет место асимптотическая устойчивость. При выполнении условий

$$a_1 + b_2 < 0, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0,$$
$$(a_1 + b_2)^2 < 4(a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{5}$$

система имеет комплексно-сопряженные корни, у которых вещественные части отрицательны. Как известно из теории устойчивости движения [3], и в этом случае система будет асимптотически устойчива, т.е. все отклонения выходной (регулируемой) величины от своего заданного значения с течением времени (при $t \to \infty$) стремятся к нулю. Если хотя бы один из корней (3) будет иметь положительную вещественную часть (или положительный корень), то система автоматического управления будет неустойчива. Неустойчивость означает, что отклонения выходных величин от своих заданных значений настольно быстро возрастают, что могут привести к разгону и выходу системы из строя.

Рассмотрим теперь исходную полную систему с учетом нелинейных членов в правой части. Для получения ответа на вопрос об устойчивости системы применим второй метод Ляпунова. Для этого выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = b_2 \int_0^x \varphi_1(x_1)dx + (b_2^2 - a_2 b_1)\, {x_1}^2 - 2b_1 b_2 x_1 x_2 + b_1 x_2^2$$

$$= b_2 \int_0^x [a_1(x_1)x_1 + \gamma x_1^2]dx + (b_2^2 - b_1 a_2)x_1^2 - 2b_1 b_2 x_1 x_2 + b_1^2 x_2^2$$

Подобная задача была рассмотрена М.А.Айзерманом [4], в которой в качестве нелинейного члена была выбрана функция $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1$, где предполагается, что выполняется неравенство

$$a_1(x_1)b_2 - b_1 a_2 > \varepsilon \text{ для } |x_1| > \xi, \tag{6}$$

при $|x_1| > \xi$, где ξ – достаточно большое число, и используя второй метод Ляпунова доказывается асимптотическая устойчивость. К этому результату можно прийти с помощью критериев устойчивости по первому приближению для достаточно малых значений x_1 и x_2.

Рассмотрим теперь полные уравнения возмущенного движения системы автоматического регулирования с учетом нелинейного элемента, моделируемого кубическим членом $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1+\gamma x^3_1$ в правой части исходной системы (1).

Предположим, что параметры системы удовлетворяют условиям

$$b_2 - a_2 b_1 > 0, \qquad a_1 = -b_2\,, \tag{7}$$

которые соответствуют случаю, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые. Этот случай в теории устойчивости называется критическим, то есть с учетом одних лишь линейных членов в дифференциальных уравнениях возмущенного движения невозможно получить ответ на вопрос об устойчивости исходной нелинейной системы автоматического регулирования

Для решения вопроса об устойчивости рассматриваемой системы выберем знакоопределенную функцию Ляпунова в виде

$$V = \int_0^x b_2 \varphi_1(x_1)dx_1 + \frac{1}{2}[(b_2^2 - b_1 a_2)\, x_1^2 - 2b_1 b_2 x_1 x_2 + b_1^2 x_2^2], \tag{8}$$

производная которой по времени в силу управнений возмущенного движения системы имеет следующий вид

$$\dot V = b_2 {\varphi_1}^2(x_1) + (b_2^2 - a_2 b_1)(a_1 x_1 + \gamma x_1^3)x_1 - a_2 b_1 b_2 x_1^2 \tag{9}$$

Подставляя значение функции $\varphi_1(x_1)=a_1(x_1)x_1+\gamma x^3_1$ в (7), после элементарных выкладок получим

$$\dot V = b_2(a_1^2 + 2a_1\gamma x_1^2 + \gamma^2 x_1^4)x_1^2 + b_2(a_1 + \gamma x_1^2)x_1^2 - \gamma a_2 b_1 x_1^4, \tag{10}$$

которая является знакопостоянной функцией для $b_2>0$ (так по условию (5) $a_1=-b_2$, то можно принять $a_1>0$, $b_2<0$. Следовательно исследуемая система будет устойчива не только при достаточно малых значениях, но и для относительно больших значений x_1, соответствующих отклонению регулируемый величины от своих заданных значений.

Таким образом для системы автоматического управления второго порядка при критическом случае чисто мнимых корней характеристического уравнения доказана устойчивость исходной системы в строгой нелинейной постановке.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда уравнение возмущенного движения системы автоматического управления имеет вид

$$\frac{d^6 y}{dt^6} + a\frac{d^4 y}{dt^4} + b\frac{d^2 y}{dt^2} + c = 0 \tag{11}$$

Характеристическое уравнение системы определяется как

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0 \tag{12}$$

Введя обозначение $\chi = \lambda^2$ получим бикубическое уравнение

$$\chi^3 + a\chi^2 + b\chi + c = 0, \tag{13}$$

Которое подстановкой $\chi = \xi - a/3$ приводится к виду

$$\xi^3 + p\xi + q = 0, \tag{14}$$

$$\text{где } p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Уравнение (4) имеет три различных действительных корня, если

$$Q = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0 \tag{15}$$

Следовательно, при выполнении условия (5) и уравнение будет иметь три различных действительных корня.

Исходная система автоматического управления может быть устойчива только тогда, когда корни характеристического уравнения (2) будут чисто мнимыми. А это возможно лишь в том случае, если корни бикубического уравнения (3) относительно x будут действительными и отрицательными. Для этого воспользуемся критерием Рауса-Гурвица: если главные диагональные миноры определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} \tag{16}$$

положительны, то все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части, т.е. при

$$a > 0, \qquad ab - c > 0, \qquad c(ab - c) > 0. \tag{17}$$

Если использовать критерий (7) Рауса-Гурвица вместе с требованием отрицательности Q, то получим необходимые условия устойчивости исследуемой ситемы в виде

$$\begin{cases} a > 0, \qquad ab - c > 0, \qquad c(ab - c) > 0, \\ \dfrac{1}{27}\left(-\dfrac{a^2}{3} + b\right)^3 + \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c\right]^2 < 0 \end{cases} \tag{18}$$

Таким образом, если условия (8) будут выполнены, то корни характеристического уравнения (2) будут чисто мнимыми. Следовательно, исследуемая система автоматического управления устойчива в линейном приближении.

Список литературы

1. Бесекерский В.А, Попов Е.П. Теория систем автоматического управления.// Москва.: Профессия. ISBN: 5-93913-035-6. 2003. 752 С.

2. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления.// М., Наука, 1986.

3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.// М.,Главная редакция физико-математической литературы. 1966. 532 С.

4. Айзерман М. А. Об одной задаче, касающейся устойчивости динамических систем. // Успехи математических наук. 1949. Т. 4.№4.

Фармацевтические науки

ТЕТРАХЛОРФЕРРАТЫ ЧЕТВЕРТИЧНОГО АММОНИЯ, ПИРИДИНИЯ И МОРФОЛИНИЯ КАК ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ АНТИМИКРОБНЫЕ ПРЕПАРАТЫ

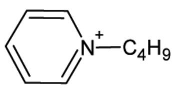
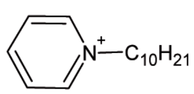
Ворончихина Л.И., Журавлев О.Е., Пресняков И.А., Кротова Н.И.

Тверской государственный университет, г. Тверь, Россия

Известно, что на биологическую активность четвертичных солей аммония оказывает влияние как природа катиона, так и аниона, поэтому замена традиционных галогенид-анионов в структуре четвертичной соли на объемные анионы типа PF_6^-, BF_4^-, $FeCl_4^-$ и др. должно сказываться и на их биологической активности. Подобные соединения – четвертичные соли алифатических или гетероциклических аминов находящиеся в жидком состоянии в широком интервале температур называются ионными жидкостями. Эти соединения в последнее время привлекают внимание в виду уникальности их свойств. Негорючесть, малое давление паров и гидрофобность ионных жидкостей исключает их попадание в окружающую среду и отвечает современным экологическим требованиям.

Целью работы был синтез тетрахлорферратов четвертичного аммония, пиридиния и морфолиния и исследование их антимикробной активности в сравнении с исходными, базовыми галоидными солями. Получены соединения общей формулы (I) получали взаимодействием четвертичных галоидных солей аминов с $FeCl_3$ в спиртовом растворе:

$A^+[FeCl_4]^-$ (I)

где, A:   $(C_4H_9)_4N$,

Антимикробную активность изучали методом диффузии в агар на среде Muller-Hinton по отношению к тест-культурам микроорганизмов грамм-положительным и грамм-отрицательным бактериям. Исследования показали, что тетрахлорферраты четвертичных солей аминов по сравнению с исходными хлоридами обладают более широким спектром антибактериального действия.

Физико-математические науки

УДК 521.36:534.1

ОБ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ

Омарова У.Ш., Турешбаев А.Т., Енсебаева Г.М., Нурова Г.Ж.

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, г. Кызылорда, Казахстан, e-mail: ylbosin_kz@mail.ru

Рассматривается ограниченная фотогравитационная круговая задача трех тел. Для случая равных масс основных тел, обращающихся друг относительно друга по круговым орбитам, получены уравнения пространственных прямолинейных движений пассивно-гравитирующей точки. Доказано существование в окрестности начала координат периодических решений для определенного множества значений параметров системы.

Ключевые слова: Задачи трех тел, треугольные точки либрации, периодические движения, фотогравитационные задачи трех тел

Considered limited photogravitational circular three-body problem. For the case of equal masses of the main bodies circulating each other in circular orbits, equations are derived spatial rectilinear motions passively gravitating point. The existence of a neighborhood of the origin of periodic solutions for a particular set of values of the system parameters.

Keywords: three-body problem, triangular libration points, periodic motions, photogravitational three-body problem

В работах [1-8], посвященных динамике частицы в поле двух гравитирующих и излучающих тел, обращающихся относительно центра