УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВИДЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ (ВОСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЧЕТВЕРТЬ КРУГА, СРЕДНЯЯ – ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ, НИСХОДЯЩАЯ – ЛИНЕЙНАЯ) В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассмотрена задача о воздействии плоской продольной волны в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) на упругую полуплоскость. Для решения поставленной задачи применяются линейные волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. Реализация исследуемой задачи осуществляется с помощью численного моделирования уравнений волновой механики. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана: методика; алгоритм; комплекс программ. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме. Приводится сопоставление с результатами аналитического решения. Результаты численного метода соответствуют физической достоверности и математической точности.

Ключевые слова: волновое уравнение, методика, алгоритм, комплекс программ, основные неизвестные, перемещение, скорость перемещений, ускорение, компоненты тензора напряжений, метод сквозного счета, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, полуплоскость, импульсное воздействие, плоская продольная волна

NUMERICAL SIMULATION OF PLANE LONGITUDINAL WAVES IN THE FORM OF A PULSE EXPOSURE (ASCENDING PART, A QUARTER CIRCLE, THE MIDDLE IS HORIZONTAL, DOWNWARD – LINEAR) IN AN ELASTIC HALF-PLANE

Musayev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

The problem of impact of a plane longitudinal wave in the form of pulse exposure (ascending part, a quarter circle, the middle is horizontal, downward – linear) elastic half-plane. To solve the set tasks apply linear wave equations of solid mechanics. The implementation of the investigated problem by using numerical simulation of the equations of wave mechanics. On the basis of the finite element method in displacements developed: method; algorithm; complex programs. For principal variables taken two moves and two speeds of displacement at node finite element. Problems are solved by a method of capturing, without isolation gaps. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions are given to the system of linear ordinary differential equations with the initial conditions, which is solved using an explicit two-layer scheme. Provides a comparison with the results of the analytical solution. The results of the numerical method are accuracy and mathematical precision.

Keywords: wave equation, method, algorithm, complex programs, principal variables, displacement, velocity, displacement, acceleration, stress tensor components, the pass-through account, differential equations, partial differential equations, the half-plane, pulse effects, flat longitudinal wave

О численном методе, алгоритме и комплексе программ

Некоторые исследования в области моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых областях различной формы рассмотрены в следующих работах [1–10].

Рассматривается моделирование нестационарных волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. То есть применяется однородный алгоритм. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях по пространственным координатам получены с помощью принципа возможных перемещений, то есть с помощью метода динамического равновесия внутренних и внешних сил.

Для аппроксимации по пространственным координатам применяются треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией упругих перемещений и прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми очками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. Для аппроксимации по временной координате применяются линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией перемещений. С помощью метода конечных элементов в перемещениях линейная задача с начальными и граничными условиями приведена к линейной задаче Коши. С помощью конечноэлемнтного варианта метода Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями приведена к явной двухслойной конечноэлементной линейной схеме в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны численный метод, алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных динамических воздействиях на сложные деформируемые системы.

Моделирование плоской продольной упругой волны в полуплоскости

Некоторая информация о физической достоверности результатов разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрена в следующих работах [4–7, 9].

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1). На границе полуплоскости *AB* приложено нормальное напряжение σ_y, которое при $1 \le n \le 11$ $(n = t/\Delta t)$ изменяется от 0 до *P*, при $11 \le n \le 21$ равно *P* и при $21 \le n \le 31$ изменяется от *P* до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0{,}1$ МПа). Граничные условия для контура *BCDA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *BCDA* не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 80$. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1{,}393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3{,}15 \cdot 10^4$ МПа ($3{,}15 \cdot 10^5$ кгс/см^2); $\nu = 0{,}2$; $\rho = 0{,}255 \cdot 10^4$ кг/м^3 ($0{,}255 \cdot 10^{-5}$ кгс с^2/см^4); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 20402 узловых точек. Решается система уравнений из 81608 неизвестных.

На рис. 3–5 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ ($\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$) во времени *n* в точках *B*1–*B*3.

На рис. 6–8 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени *n* в точках *B*1–*B*3.

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны, которые изложены в работе [1].

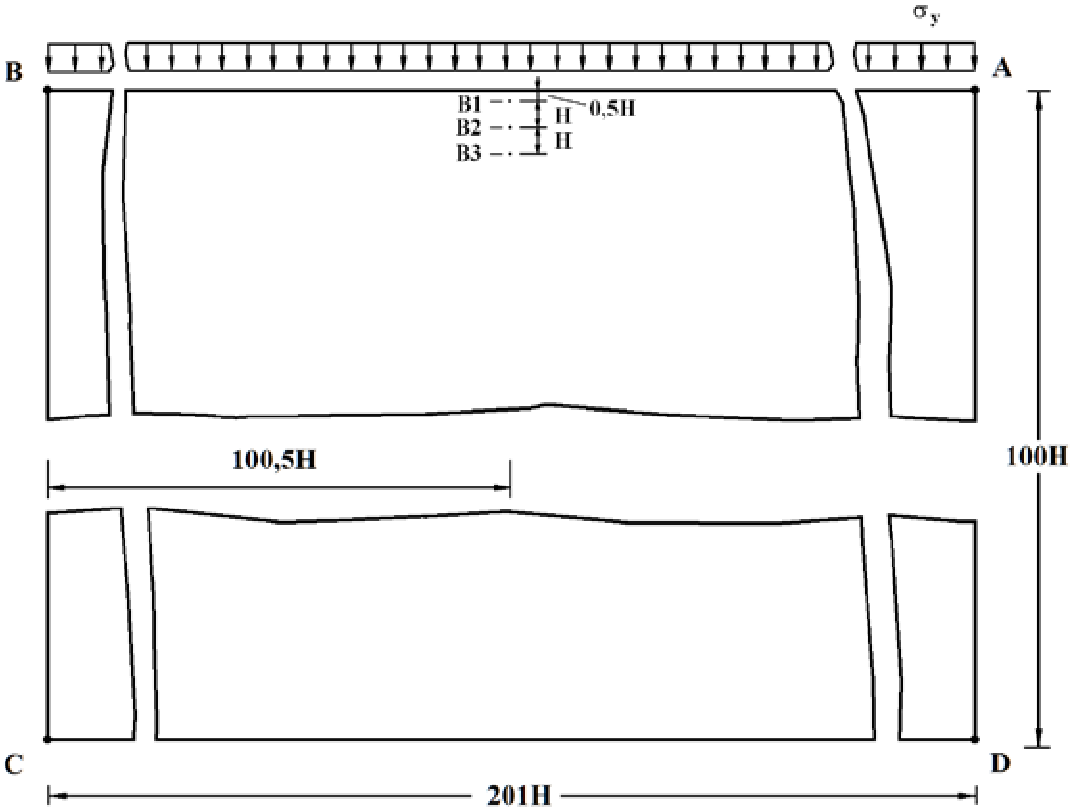

Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных волн в упругой полуплоскости

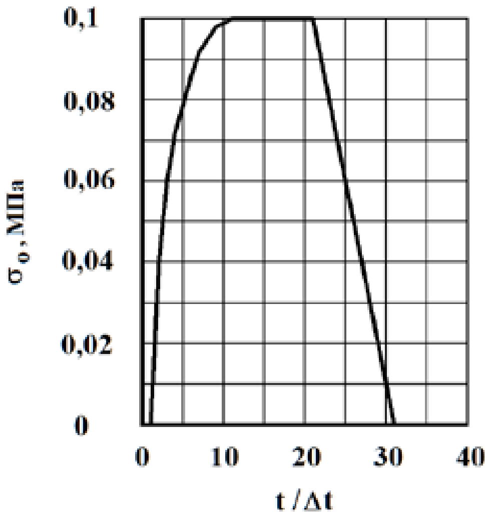

Рис. 2. Импульсное воздействие (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная)

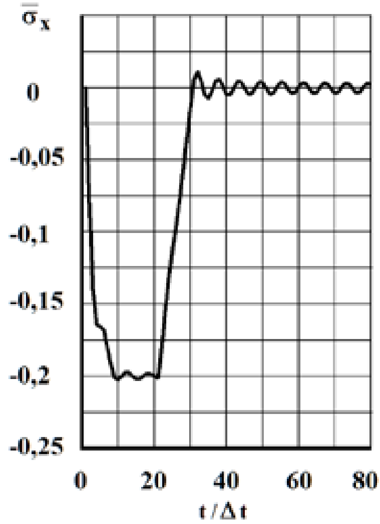

Рис. 3. Изменение нормального напряжения $\overline{\sigma}_x$ *во времени* $t\,/\,\Delta t$ *в точке B1*

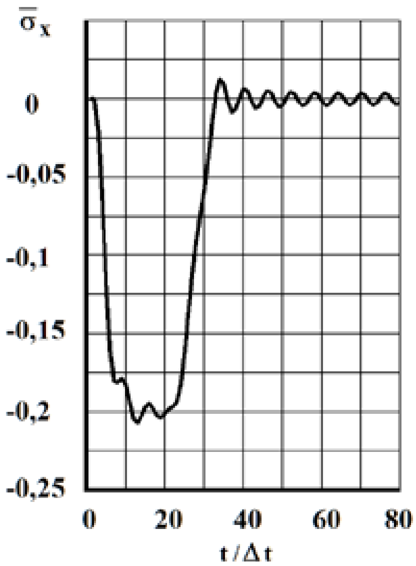

Рис. 4. Изменение нормального напряжения $\overline{\sigma}_x$ *во времени* $t\,/\,\Delta t$ *в точке B2*

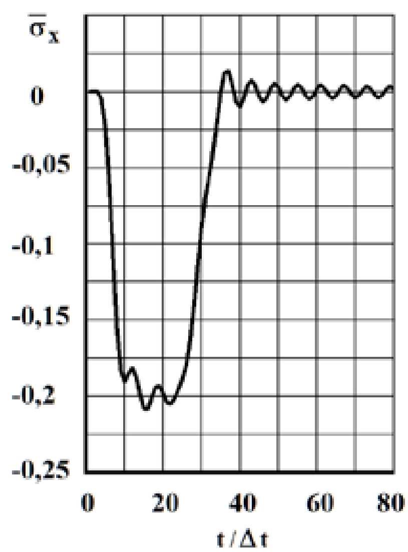

Рис. 5. Изменение нормального напряжения $\overline{\sigma}_x$ *во времени* $t\,/\,\Delta t$ *в точке B3*

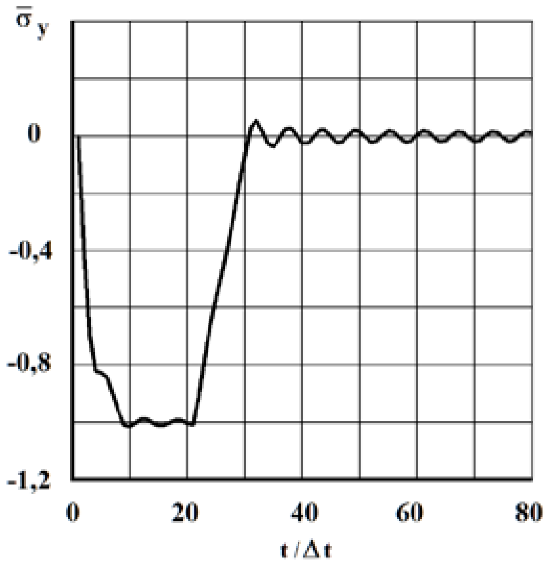

Рис. 6. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ *во времени* $t / \Delta t$ *в точке B1*

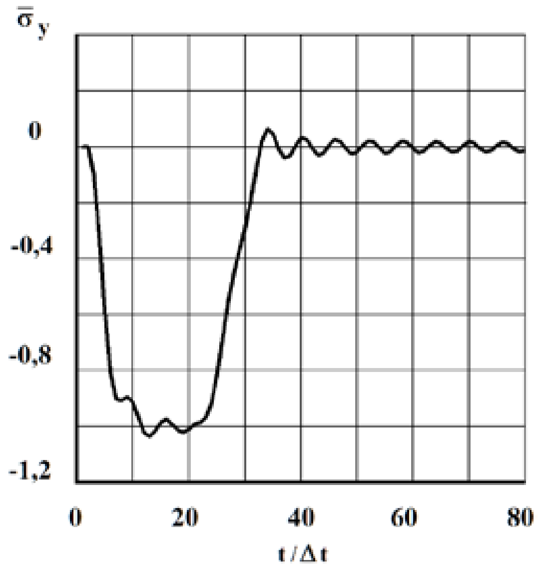

Рис. 7. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ *во времени* $t / \Delta t$ *в точке B2*

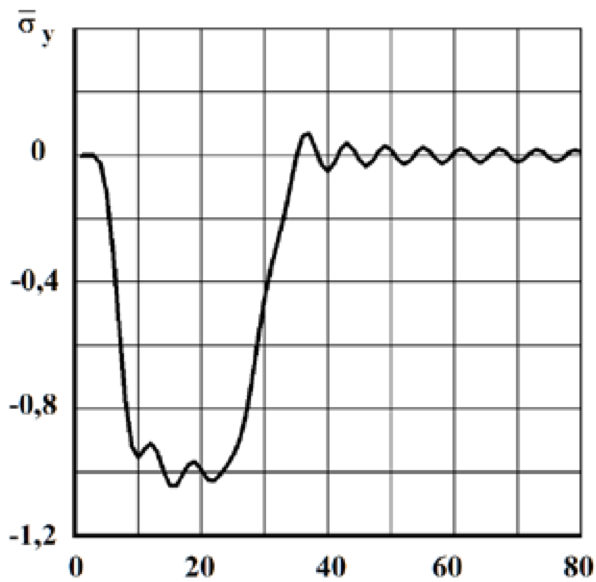

Рис. 8. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ *во времени* $t / \Delta t$ *в точке B3*

Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. Тогда из этих точек во все стороны начинают излучаться волны. На некотором расстоянии от центра возмущения рассматриваемые волны можно представить как плоские. Тогда все частицы движутся параллельно направлению распространения волны. Такие волны принято считать плоскими. На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния $\sigma_x = -|\sigma_0|$ и $\sigma_y = -\nu|\sigma_0|$. Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 2).

Для упругих нормальных напряжений σ_x и σ_y имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения. Таким образом, можно сделать вывод, что на точность численного решения оказывает влияние аппроксимация воздействия.

Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения задач о распространении импульсных воздействий в деформируемых телах.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

2. Мусаев В.К. О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.

3. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

4. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

5. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.

6. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

7. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

8. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

9. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

10. Musayev V.K. Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area // International Journal Of Applied And Fundamental Research. – 2014. – № 2; URL: www.science-sd.com/457-24639.