

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. То есть применяется однородный алгоритм. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях по пространственным координатам получены с помощью принципа возможных перемещений, то есть с помощью метода динамического равновесия внутренних и внешних сил. Для аппроксимации по пространственным координатам применяются треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией упругих перемещений и прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. Для аппроксимации по временной координате применяются линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией перемещений. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Применяется квазирегулярный подход при аппроксимации исследуемой области. Рассмотрены следующие задачи. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное квадратное отверстие. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на вырез треугольного профиля. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие.

Ключевые слова: динамика сплошных сред, распространение волн, волновая теория, полуплоскость, алгоритмический язык Фортран-90, численный метод, алгоритм, комплекс программ, конечные элементы первого порядка, условия на фронте плоской волны, импульсное воздействие, функция Хевисайда, напряжения на фронте плоской волны, свободное круглое отверстие, свободное квадратное отверстие, подкрепленное круглое отверстие, подкрепленное квадратное отверстие, вырез треугольного профиля

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSIENT ELASTIC STRESS WAVES IN SOME PROBLEMS OF METHODOLOGICAL NATURE

Musayev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information on the modeling of transient stress waves in deformable regions using the finite element method in movements. Problems are solved by a method of capturing, without isolation gaps. We have used the homogeneous algorithm. For the main unknown in the node of the finite element has two elastic displacements and two speeds of elastic displacements. The basic relation of the finite element method in the movements on the spatial coordinates is obtained using the principle of possible displacements, i.e. using the method of dynamic equilibrium of internal and external forces. For approximation on the spatial coordinates used triangular finite elements with linear approximation of elastic displacements and rectangular finite element with four nodal points with bilinear approximation of elastic displacements. For approximation on the time coordinate used linear finite elements with two nodal points with a linear approximation of the displacements. When developing complex programs used algorithmic language Fortran-90. Applies quasi-regular approach in approximating the study area. The following tasks. Discusses the problem of the influence of plane longitudinal elastic wave by a free round hole. Discusses the problem of the influence of plane longitudinal elastic wave by a free square hole. Discusses the problem of the influence of plane longitudinal elastic wave by a triangular cutout profile. Discusses the problem of the influence of plane longitudinal elastic wave by a reinforced round hole. Discusses the problem of the influence of plane longitudinal elastic wave by a reinforced square opening.

Keywords: dynamics of continuous media, wave propagation, wave theory, the half-plane, the algorithmic language Fortran-90, and numerical method, algorithm, complex programs, finite elements of first order, conditions at the front of the plane wave, pulse effects, the Heaviside function, the voltage on the front of a plane wave, free, round hole, free square hole, backed up by a round hole, reinforced by a square hole, cut a triangular profile

В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач в области распространения волн напряжений в строительных объектах при нестационарных сейсмических воздействиях. Рассматриваемые физические процессы решаются с помощью методов математического моделирования, который в настоящее

время является одним из мощных инструментов исследования.

Некоторые результаты в области целого комплекса проблем волнового воздействия на сооружения с окружающей средой рассмотрены в следующих работах [1–10].

Для решения краевой задачи используется метод конечных элементов в пере-

мещениях. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов (однородный алгоритм). Решение двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями осуществляем с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Для решения поставленной задачи используем метод конечных элементов в перемещениях. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для некоторого тела, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\dot{\vec{\Phi}} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \vec{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (1) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1).

Рассмотрим интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \vec{\Phi} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (2)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\dot{\Phi}}_{i+1}, \quad (3)$$

где Δt – шаг по временной переменной.

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p}, \quad (4)$$

где Δl_i – длина стороны конечного элемента; C_p – скорость распространения продольной волны.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения.

Некоторая информация о достоверности разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1–7, 9–10].

1. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми.

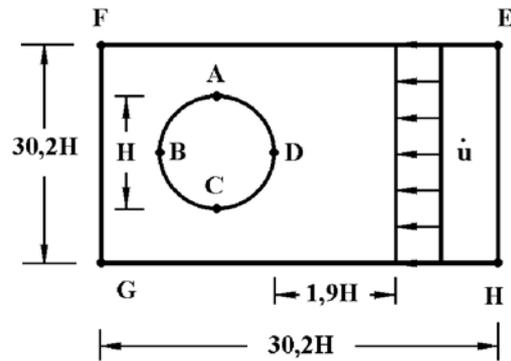


Рис. 1. Постановка задачи для свободного круглого отверстия

В сечении на расстоянии $1,9H$ (рис. 1) при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) скорость упругого перемещения \dot{u} изменяется линейно от 0 до P ($P = \sigma_0 / (\rho C_p)$) ($\sigma_0 = -0,1$ МПа), а при $n > 10$ $\dot{u} = P$. Контур круглого отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. Граничные условия для контура $EFGH$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $EFGH$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 260$. Расчеты проведены при следующих исход-

ных данных: $H = 0,18$ м; $\Delta t = 0,407 \cdot 10^{-5}$ с; $E = 0,36 \cdot 10^4$ МПа; $n = 0,36$; $r = 0,122 \cdot 10^4$ кг/м³; $C_r = 1841$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками.

2. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное квадратное отверстие. Начальные условия приняты нулевыми.

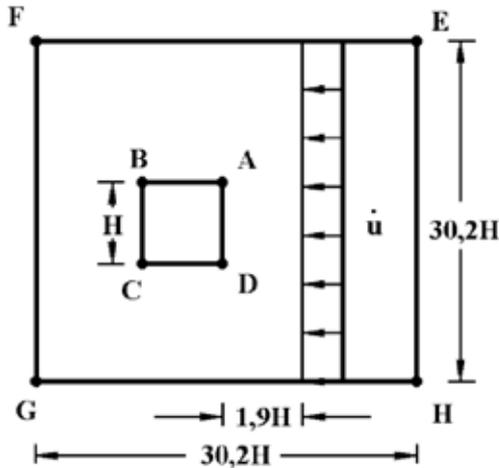


Рис. 2. Постановка задачи для свободного квадратного отверстия

В сечении на расстоянии $1,9H$ (рис. 2) при $0 \leq n \leq 10$ скорость упругих перемещений \dot{u} изменяется линейно от 0 до P , а при $n > 10$ $\dot{u} = P$ ($P = \sigma_0 / (\rho C_p)$ ($\sigma_0 = -0,1$ МПа)). Контур квадратного отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. Граничные условия для контура $EFGH$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $EFGH$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Исследуемая расчетная область имеет 1337 узловых точек.

3. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на вырез треугольного профиля. Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1,8H$ (рис. 3) при $0 \leq n \leq 10$ скорость упругого перемещения изменяется линейно от 0 до P , а при $n > 10$ $\dot{u} = P$ ($P = \sigma_0 / (\rho C_p)$ ($\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²))). Контур выреза $ABCDEF$ (кроме точки B) предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. Граничные условия для контура $FGHA$ при $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $FGHA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Исследуемая расчетная область имеет 1464 узловых точек.

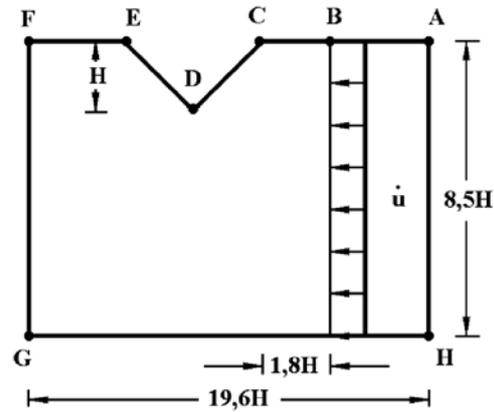


Рис. 3. Постановка задачи для выреза треугольного профиля

4. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1,6H$ (рис. 4) при $0 \leq n_1 \leq 10$ ($n_1 = t / \Delta t_1$) скорость упругого перемещения \dot{u}_2 изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0 / (\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 > 10$ $\dot{u}_2 = P_1$ ($\sigma_0 = -0,1$ МПа). Внутренний контур подкрепленного отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. На границе подкрепления и среды $EFGH$ приняты условия непрерывности перемещений. Граничные условия для контура $IJKL$ при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0$. Отраженные волны от контура $IJKL$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n_1 \leq 540$.

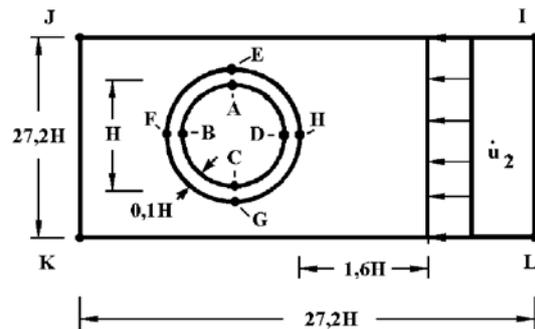


Рис. 4. Постановка задачи для подкрепленного круглого отверстия

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = 0,2$ м; $\Delta t_1 = 0,186 \cdot 10^{-5}$ с; $E_1 = 0,72 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_1 = 0,3$; $\rho_1 = 0,275 \cdot 10^4$ кг/м³; $C_{p1} = 5364$ м/с; $\Delta t_2 = 0,407 \cdot 10^{-5}$ с; $E_2 = 0,36 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_2 = 0,36$; $\rho_2 = 0,122 \cdot 10^4$ кг/м³; $C_{p2} = 1841$ м/с (...1 – подкрепление; ...2 – среда).

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками.

5. Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие.

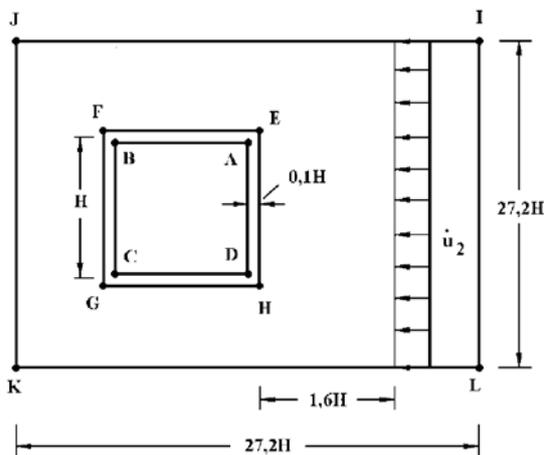


Рис. 5. Постановка задачи для подкрепленного квадратного отверстия

Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1,6H$ (рис. 5) при $0 \leq n_1 \leq 10$ скорость упругого перемещения \dot{u}_2 изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0 / (\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 > 10$ $\dot{u}_2 = P_1$ ($\sigma_0 = -0,1$ МПа). Внутренний контур подкрепленного квадратного отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. На границе подкрепления и среды $EFGH$ приняты условия непрерывности перемещений. Граничные условия для контура $IJKL$ при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0$. Отраженные волны от контура $IJKL$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n_1 \leq 540$. Исследуемая расчетная область имеет 1337 узловых точек.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

Рассмотрена постановка задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие.

Рассмотрена постановка задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное квадратное отверстие.

Рассмотрена постановка задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на вырез треугольного профиля.

Рассматривается постановка задачи о воздействии плоской продольной упру-

гой волны на подкрепленное круглое отверстие.

Рассматривается постановка задачи о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное квадратное отверстие.

Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой.

Математическое моделирование позволяет учесть инженерные объекты при решении задач о безопасности территорий при нестационарных волновых сейсмических воздействиях.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
2. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.
3. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.
4. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.
5. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
6. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.
7. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
8. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
9. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.
10. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.