УДК 519.677

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Шерстнева Н.А.

ФГБОУ ВПО «Смоленский государственный университет», Смоленск, e-mail: MathSmolgu@gmail.com

В статье показано, как система компьютерной математики Maple может быть использована при изучении темы «Интегральное исчисление функций нескольких переменных». Приведены примеры, иллюстрирующие процесс вычисления тройного интеграла и раскрывающие прикладной характер данного материала.

Ключевые слова: двойной и тройной интеграл; приложения кратных интегралов в геометрии; система компьютерной математики Maple

THE USE OF COMPUTER MATHEMATICS MAPLE IN THE EDUCATIONAL PROCESS

Sherstneva N.A.

Smolensk State University, Smolensk, e-mail: MathSmolGU@gmail.com

The article shows how the system of computer mathematics Maple can be used in the study of topics «Integral calculus of functions of several variables». Examples illustrating the process of calculating and disclosing the triple integral applied nature of the material.

Keywords: double and triple integral; applications of multiple integrals geometry system; of computer mathematics Maple

Тема «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» занимает важное место в образовательном процессе в высшей школе. Она имеет большое значение, как в самой математике, так и широко используется при решении прикладных задач. При этом, чтобы сделать процесс математического моделирования изучаемых практических задач более наглядным и понятным оказываются полезными различные пакеты систем компьютерной математики, в частности, можно применить систему Maple.

Цель исследования. Рассмотреть возможности системы компьютерной математики Maple для вычисления кратных интегралов и решения прикладных задач.

Материал исследования. Рассмотрим несколько примеров, связанных с вычислением кратных интегралов или с их приложениями в геометрии, и покажем возможности решения данных заданий в системе Maple.

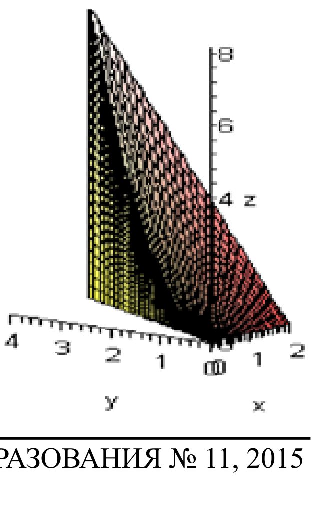
Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} (xz)^2\,dxdydz\,,$$

где тело (V) ограничено поверхностями $x = 2$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = xy$.

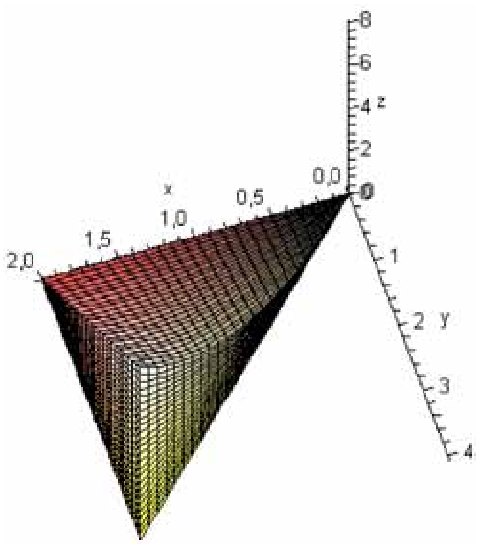
Решение. Так как выполнение пространственных чертежей вручную весьма затруднительно, то воспользуемся компьютером для создания наглядного образа. Сначала попытаемся использовать одинаковый масштаб по осям координат:

```
> with(plots):
> with(student):
> A1:=plot3d([(2),(u),(v)],u=0..4,v=0..2*u,axes=normal):
> A2:=plot3d([(u),(2*u),(v)],u=0..2,v=0..(u^2)*2,axes=normal):
> A3:=plot3d([(u),(0),(v)],u=0..2,v=0..0,axes=normal):
> A4:=plot3d([(u),(v),(0)],u=0..2,v=0..2*u,axes=normal):
> A5:=plot3d([(u),(v),(u*v)],u=0..2,v=0..2*u,axes=normal):
> display({A1,A2,A3,A4,A5},labels=[x,y,z],scaling=constrained);
```



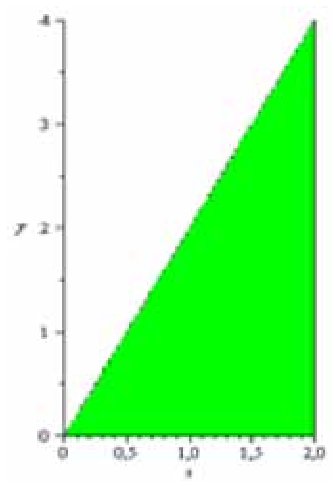
Как видно, этот подход не очень удачен. Поэтому для наглядности иллюстрации воспользуемся разным масштабом по осям координат:

> display({A1,A2,A3,A4,A5},labels=[x,y,z]);



Область является правильной относительно всех осей. При проектировании тела на плоскость *Oxy* получим:

> inequal({y<x*2,x=2,y=0},x=0..2,y=0..4,optionsfeasible=(color=green),optionsexcluded=(color=white),axes=normal,labels=[x,y], scaling=CONSTRAINED);



Исходный интеграл сводится к повторному:

$$\iiint\limits_{(V)} (xz)^2\,dxdydz = \int_0^2 dx\int_0^{2x} dy\int_0^{xy}(xz)^2\,dz =$$

$$= \int_0^2 dx\int_0^{2x} x^2\left(\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^{xy}\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 x^5 dx\int_0^{2x} y^3 dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 x^5\left(\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{2x}\right)dx = \frac{4}{3}\int_0^2 x^9 dx =$$

$$\frac{4}{3}\,\frac{x^{10}}{10}\Bigg|_0^2 = \frac{2048}{15}.$$

Вычисление интеграла в Maple происходит следующим образом:

> with(student):

> Tripleint((x*z)^2, z=0..x*y, y=0..2*x, x=0..2);

$$\int_0^2\int_0^{2x}\int_0^{xy} x^2 z^2\,dz\,dy\,dx$$

> value(%);

$$\frac{2048}{15}$$

Пример 2. Вычислить объем прямого бруса, ограниченного сверху параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и имеющего основанием квадрат, ограниченный в плоскости *Oxy* прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Решение. Прежде всего, делаем рисунок с помощью системы Maple:

> with(plots):

> with(student):

> A1:=plot3d([(u),(v),(4-u^2-v^2)], u=-1..1,v=-1..1, axes=normal):

> A2:=plot3d([(u),(v),(0)],u=-1..1,v=-1..1,axes=normal):

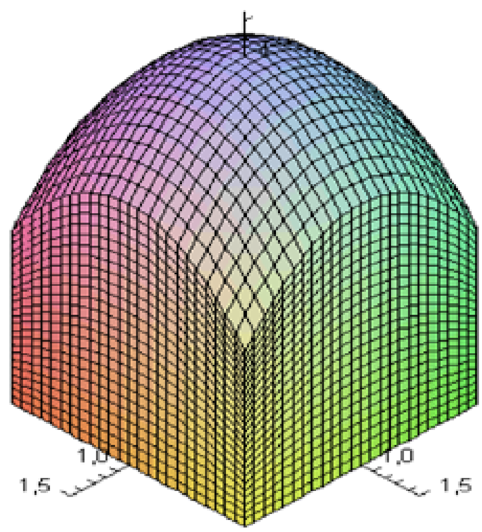
> A3:=plot3d([(1),(u),(v)],u=-1..1, v=0..3-u^2,axes=normal):

> A4:=plot3d([(-1),(u),(v)],u=-1..1, v=0..3-u^2,axes=normal):

> A5:=plot3d([(u),(1),(v)],u=-1..1, v=0..3-u^2,axes=normal):

> A6:=plot3d([(u),(-1),(v)],u=-1..1, v=0..3-u^2,axes=normal):

> display({A1,A2,A3,A4,A5,A6}, labels=[x,y,z],scaling=constrained, view = [-1.5 .. 1.5, -1.5 .. 1.5, 0 .. 4.5]);



Так как основанием бруса служит квадрат со сторонами, параллельными координатным осям Ox и Oy, то пределы интегрирования по обеим переменным постоянны. Используя формулу

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy,$$

получим:

$$V = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \left(4 - x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(8 - 2x^2 - \frac{2}{3}\right) dx = \left[\frac{22}{3}x - \frac{2}{3}x^3\right]\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{44}{3} - \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Вычисление интеграла в Maple выглядит следующим образом:

```
> with(student):
> Doubleint(4-x^2-y^2, y=-1..1, x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(4 - x^2 - y^2\right) dy\, dx$$

```
> value(%);
```

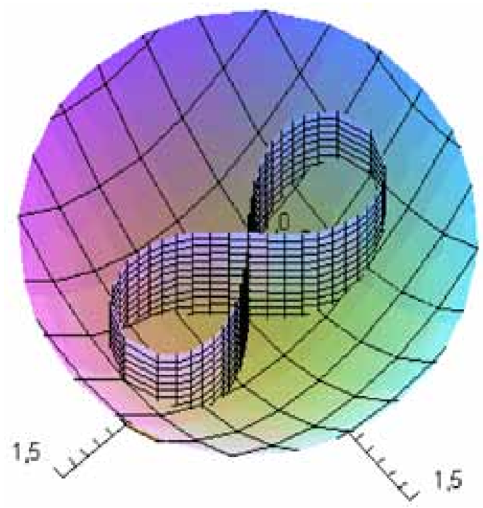
$$\frac{40}{3}$$

Пример 3. Вычислить площадь части поверхности $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$.

Решение. Контуром проекции вырезанной части на плоскость Oxy является лемниската $\rho = \sqrt{\cos 2\phi}$.

Построим общий вид пересекающихся поверхностей:

```
> with(plots):
> with(student):
> A1:=plot3d([(u),(v),((u^2+v^2)/2)],
u=-4..4,v=-4..4,axes=normal):
> A2:=plot3d([(u),((1/2)*sqrt(-2-
4*u^2+2*sqrt(8*u^2+1))),(v)],
u=-1..1,v=-1..1,axes=normal):
> A3:=plot3d([(u),(-(1/2)*sqrt(-2-4*u^2+2*sq
rt(8*u^2+1))),(v)],u=-1..1,
v=-1..1,axes=normal):
> display({A1,A2,A3,A4,A5},labels=[x,y,z],
scaling=constrained,view = [-1.5 .. 1.5, -1.5 ..
1.5, 0 .. 1]);
```



Построим вырезаемую цилиндром поверхность:

```
> solve((x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, y);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2 - 4x^2 + 2\sqrt{8x^2 + 1}},$$

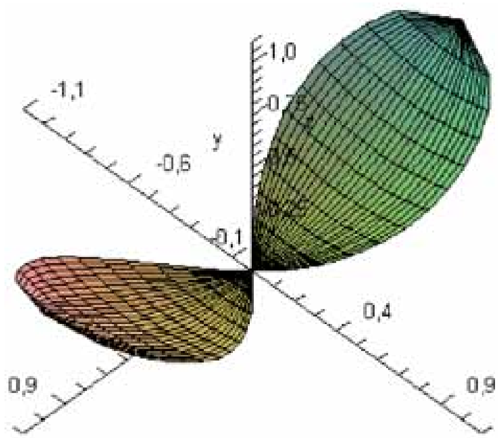
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-2 - 4x^2 + 2\sqrt{8x^2 + 1}},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2 - 4x^2 - 2\sqrt{8x^2 + 1}},$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-2 - 4x^2 - 2\sqrt{8x^2 + 1}}$$

```
A4 := plot3d([(u), (v), ((u^2 + v^2)/2)], u =-1..1, v =-(1/2)
    *sqrt(-2-4*u^2 + 2*sqrt(8*u^2 + 1)) ..(1/2)*sqrt(-2-4*u
>   ^2 + 2*sqrt(8*u^2 + 1)), axes = normal) :

display({A4}, labels = [x, y, z], scaling = constrained, view = [-1.1
>   .. 1.1, -1.1 .. 1.1, 0 .. 1.1]);
```



Цилиндр вырезает из параболоида два равных куска поверхности. Из уравнения параболоида

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

получим подынтегральную функцию, для которой

$$z'_x = x,\ z'_y = y,$$

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Следовательно,

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

Преобразуем интеграл к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Подынтегральная функция запишется в виде

$$\sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+\rho^2},$$

а уравнение лемнискаты – в виде

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi,$$

или $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Так как параболоид и цилиндр симметричны относительно плоскостей *Oxz*, *Oyz*, то достаточно вычислить интеграл по одной четвертой части лемнискаты, расположенной в первой четверти плоскости *Oxz*:

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{5}{9} - \frac{\pi}{12},$$

откуда

$$S = 4\cdot\left(\frac{5}{9} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

Вычисление интеграла в Maple:

```
> with(student):Doubleint(4*rho*sqrt(1+r
ho^2), rho=0..sqrt(cos(2*phi)), phi=0..Pi/4);
```

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{\sqrt{\cos(2\phi)}} 4\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\phi$$

```
> value(%);
```

$$-\frac{1}{3}\pi + \frac{20}{9}$$

Заключение

Применение в учебном процессе не только «ручных», но и компьютерных вычислений делает процесс математического моделирования ситуации более наглядным и представимым для обучающихся (особенно в случае трёхмерного пространства); позволяет уменьшить трудоёмкость выкладок (что особенно важно при изучении курса высшей математики на непрофильных направлениях подготовки) и сравнить математический и компьютерный методы решения одной и той же математической проблемы (что полезно для студентов профильного уровня обучения).

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учеб. пособие для вузов / Бугров Я.С., Никольский С.М. – М., Наука, 1997. – 446 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 558 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2: учеб. пособие для вузов / Пискунов Н.С. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 544 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3: учеб. пособие для вузов / Фихтенгольц Г.М. – М., 1963 – 656 с.