

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва,

e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. То есть применяется однородный алгоритм. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях по пространственным координатам получены с помощью принципа возможных перемещений, то есть с помощью метода динамического равновесия внутренних и внешних сил. Для аппроксимации по пространственным координатам применяются треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией упругих перемещений и прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. Для аппроксимации по временной координате применяются линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией перемещений. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Применяется квазирегулярный подход при аппроксимации исследуемой области.

Ключевые слова: динамика сплошных сред, распространение волн, волновая теория, алгоритмический язык Фортран-90, вычислительный эксперимент, численный метод, алгоритм, комплекс программ, конечные элементы первого порядка, аппроксимация исследуемой области, квазирегулярный подход, исследуемая область

NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY WAVES IN AN ELASTIC DEFORMABLE BODIES

Musayev V.K.

MSMU, Moscow,

e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information on the modeling of non-stationary of stress waves in deformable fields using the finite element method in displacements. Problems are solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. That is, apply the homogeneous algorithm. For the main unknown node finite element has two elastic movement and two speeds of elastic displacements. The basic relations of the finite element method in displacements in spatial coordinates is obtained using the principle of possible displacements, i.e. using the method of dynamic balance of internal and external forces. For approximation of spatial coordinates used triangular finite elements with linear approximation of elastic displacements and rectangular finite elements with four nodal points with bilinear approximation of elastic displacements. For approximation on the time coordinate used linear finite elements with two nodal points with linear approximation of displacements. When developing complex programs used algorithmic language Fortran-90. Quasi-regular used approach in approximating the study area.

Keywords: dynamics of continuous media, wave propagation, wave theory, algorithmic language Fortran-90, computational experiment, numerical method, algorithm, software complex, finite elements first order approximation of the study area, the quasi-regular approach, your area of study

Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных волн в упругих деформируемых средах рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY (рис. 1), которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} C_p^2 & C_p^2 - 2C_s^2 & 0 \\ C_p^2 - 2C_s^2 & C_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_s^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, (x, y) \in (\Gamma \in S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала;

$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – ко-

эффициент Пуассона; E – модуль упругости; S ($S_1 \cup S_2$) – граничный контур тела Γ .

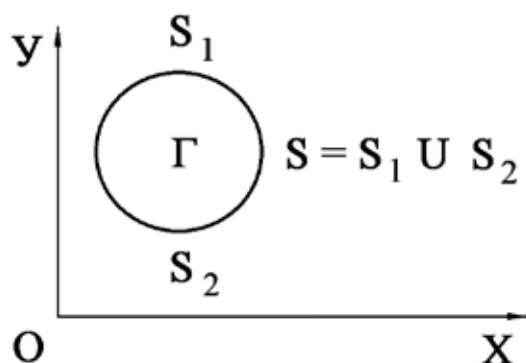


Рис. 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях. Начальные условия в области Γ зададим в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \end{pmatrix}, (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

где u_0 , v_0 , $\dot{u}_0$ и $\dot{v}_0$ – заданные в области Γ функции.

Граничные условия зададим в виде: составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе S_1

$$\begin{pmatrix} \sigma_x, \tau_{xy} \\ \tau_{xy}, \sigma_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, (x, y) \in S_1; \quad (3)$$

составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе S_2

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, (x, y) \in S_2, \quad (4)$$

где l и m – направляющие косинусы; A_x , A_y , B_x и B_y – заданные на границе S функции.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1–4) – используем метод конечных элементов в перемещениях.

Постановки, численные методы, технология программных комплексов и анализ результатов решения нестационарных динамических задач для областей сложной формы рассмотрены в следующих работах [1–10].

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Для решения линейных дифференциальных уравнений (1–4) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi} \Big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}} \Big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (5)$$

где $\bar{H}$ – матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узло-

вых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1–4) привели к линейной задаче Коши (5).

Матрица жесткости, вектор инерции и упругие напряжения в центре тяжести треугольного конечного элемента с тремя узловыми точками (рис. 2) представим в следующем виде

$$K = \frac{\rho h}{4\Delta_{123}} \begin{bmatrix} k_{1i,j} & k_{2i,j} \\ k_{3i,j} & k_{4i,j} \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$H = \frac{\rho\Delta_{123}h}{3} \|1, 1, 1, 1, 1, 1\|^T; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\rho}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 (C_p^2 b_i u_i + (C_p^2 - 2C_s^2) c_i v_i), \\ \sigma_y &= \frac{\rho}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 ((C_p^2 - 2C_s^2) b_i u_i + C_p^2 c_i v_i), \\ \tau_{xy} &= \frac{\rho C_s^2}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 (c_i u_i + b_i v_i), \end{aligned} \quad (8)$$

где $k_{1i,j} = C_p^2 b_i b_j + C_s^2 c_i c_j$;

$$k_{2i,j} = (C_p^2 - 2C_s^2) b_i c_j + C_s^2 b_j c_i;$$

$$k_{3i,j} = (C_p^2 - 2C_s^2) b_j c_i + C_s^2 b_i c_j;$$

$$k_{4i,j} = C_s^2 b_i b_j + C_p^2 c_i c_j;$$

h – толщина треугольного конечного элемента.

Матрица жесткости, вектор инерции и упругие напряжения в центре тяжести прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками (рис. 3) представим в следующем виде

$$\bar{K} = \rho h \begin{bmatrix} k_{1i,j} & k_{2i,j} \\ k_{3i,j} & k_{4i,j} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\bar{H} = \rho a b h \|1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\|^T; \quad (10)$$

$$\sigma_x = \frac{\rho}{4ab} \sum_{i=1}^4 (b C_p^2 I_i u_i + (C_p^2 - 2C_s^2) a J_i v_i),$$

$$\sigma_y = \frac{\rho}{4ab} \sum_{i=1}^4 ((C_p^2 - 2C_s^2) b I_i u_i + a C_p^2 J_i v_i),$$

$$\tau_{xy} = \frac{\rho C_s^2}{4ab} \sum_{i=1}^4 (a J_i u_i + b I_i v_i), \quad (11)$$

$$\text{где } k_{1i,j} = \frac{b}{a} C_p^2 P_{1i,j} + \frac{a}{b} C_s^2 P_{2i,j};$$

$$k_{2i,j} = (C_p^2 - 2C_s^2) P_{3i,j} + C_s^2 P_{4i,j};$$

$$k_{3i,j} = (C_p^2 - 2C_s^2) P_{4i,j} + C_s^2 P_{3i,j};$$

$$k_{4i,j} = \frac{a}{b} C_p^2 P_{2i,j} + \frac{b}{a} C_s^2 P_{1i,j};$$

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2, & -2, & -1, & 1 \\ -2, & 2, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -2, & 2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2, & 1, & -1, & -2 \\ 1, & 2, & -2, & -1 \\ -1, & -2, & 2, & 1 \\ -2, & -1, & 1, & 2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & -1, & 1, & 1 \\ -1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{I} = \|1, -1, -1, 1\|^T; \quad \vec{J} = \|1, 1, -1, -1\|^T;$$

h – толщина прямоугольного конечного элемента.

Определим упругое контурное напряжение на границе области, свободной от нагрузок. С помощью вырождения прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками получим контурный конечный элемент с двумя узловыми точками (рис. 4).

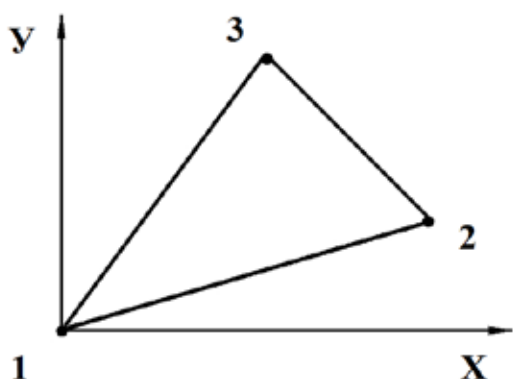


Рис. 2. Треугольный конечный элемент с тремя узловыми точками

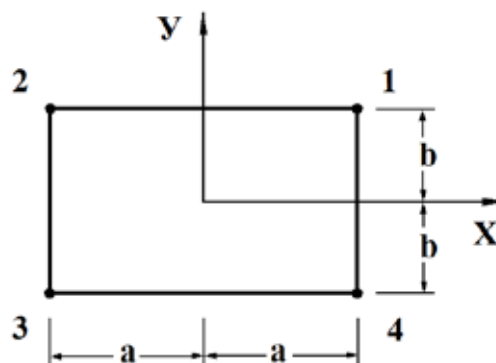


Рис. 3. Прямоугольный конечный элемент с четырьмя узловыми точками

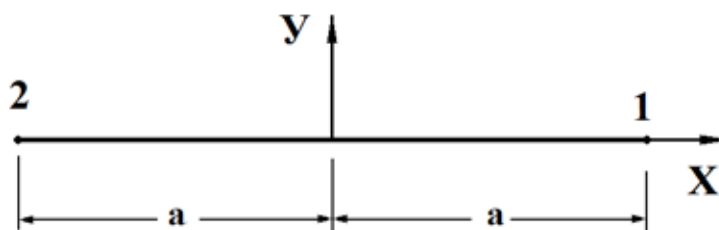


Рис. 4. Контурный конечный элемент с двумя узловыми точками

При повороте оси x на угол α против часовой стрелки, получим упругое контурное напряжение σ_k в центре тяжести контурного конечного элемента с двумя узловыми точками

$$\sigma_k = (\rho C_p^2 / (2a))((u_1 - u_2) \cos \alpha + (v_1 - v_2) \sin \alpha). \quad (12)$$

Рассмотрим интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \vec{\Phi} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \vec{\dot{\Phi}}. \quad (13)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (13) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \quad \vec{\dot{\Phi}}_{i+1} = \vec{\dot{\Phi}}_i + \Delta t \vec{\dot{\Phi}}_{i+1}, \quad (14)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Система уравнений (14) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости (5), должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1–4).

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате

те и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (15)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента; r – общее число конечных элементов в исследуемой области.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате (15).

В работах [1, 3–6, 9] приведена информация об оценке математической и физической достоверности разработанного метода, алгоритма и комплекса программ.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

2. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

3. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

4. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.

5. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

6. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

8. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

9. Мусаев В.К. Исследование устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.

10. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных упругих волн напряжений в некоторых задачах методического характера // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 – С. 227–230.