

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЪЕКТЕ ХРАНЕНИЯ ОПАСНЫХ ВЕЩЕСТВ С ПОЛОСТЬЮ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ПЯТИ)

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о численном моделировании волн напряжений в объекте сложной формы. Рассматриваются некоторые вопросы решения задачи о воздействии упругой взрывной волны в объекте хранения опасных веществ. С помощью метода конечных элементов дифференциальные уравнения в частных производных приведены к линейной задаче Коши с начальными условиями. С помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями приведена к явной двухслойной конечноэлементной линейной схеме в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек исследуемой области. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях по пространственным координатам получены с помощью принципа возможных перемещений, то есть с помощью метода динамического равновесия внутренних и внешних сил. Поставленная задача решается с помощью методов вычислительной механики. Для решения задачи используется численный метод, алгоритм и комплекс программ, разработанный автором статьи. Получены компоненты тензора напряжений в характерных областях исследуемой задачи. Приводятся контурные напряжения на свободной поверхности упругой полуплоскости. Показано, что полости увеличивают безопасность окружающей среды от взрывных воздействий в объекте хранения опасных веществ.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, воздействие, импульс, взрывная волна, воздействие в виде треугольника, волновая теория взрывной безопасности, численное моделирование, объект хранения опасных веществ, вертикальная прямоугольная полость, упругая полуплоскость, неотражающие граничные условия, контурное напряжение, компоненты тензора напряжений, безопасность окружающей среды

MATHEMATICAL MODELING OF TRANSIENT ELASTIC STRESS WAVES IN THE OBJECT STORAGE OF HAZARDOUS SUBSTANCES WITH A CAVITY IN THE SHAPE OF A RECTANGLE (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO FIVE)

Musayev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information on numerical modelling of stress waves in an object of complex shape. The solution to the problem of elastic impact of a blast wave in the object the storage of hazardous substances. Using the finite element method differential equations reduced to linear Cauchy problem with initial conditions. With the help of the finite element Galerkin method option system of ordinary differential equations of the second order in displacements with initial conditions given by an explicit two-layer finite-element scheme in linear movements for internal and boundary nodal points in the study area. For the main unknown node finite element has two elastic movement and two speeds of elastic displacements. The basic relations of the finite element method in displacements in spatial coordinates is obtained using the principle of possible displacements, i.e. using the method of dynamic balance of internal and external forces. The problem is solved using methods of computational mechanics. To solve the problem using a numerical method, algorithm and package of programs was developed by the author. The obtained stress tensor components in the characteristic areas of the investigated problem. Given a contour stress on the free surface of an elastic half-plane. It is shown that the cavity enhance the safety of the environment from the effects of explosive object in the storage of hazardous substances.

Keywords: computational experiment, impact, impulse, blast wave, impact in the form of a triangle, wave theory, explosion safety, numerical simulation, object storage of hazardous substances, vertical rectangular cavity, the elastic half-plane, non-reflecting boundary conditions, a contour stress, stress tensor components, the safety of the environment

Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY (рис. 1), которому в на-

чальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

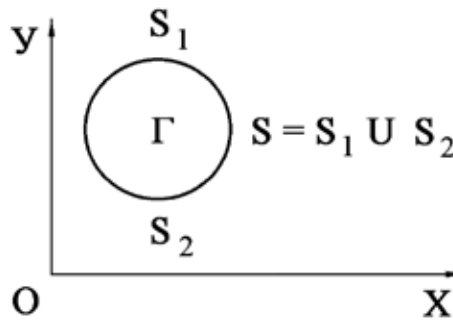


Рис. 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X},$$

$$(x, y) \in (\Gamma \in S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка численного метода, алгоритма и комплекса программ

Конечноэлементное моделирование позволяет задачу с бесконечным числом неизвестных привести к задаче с конечным

числом неизвестных, решение которой принципиально возможно на вычислительных машинах.

С помощью конечноэлементного моделирования получаем приближенное решение дифференциальной задачи, то есть задачи с начальными и граничными условиями.

В работах [1–10] приводится информация о численном моделировании нестационарного динамического напряженного состояния сложных систем с помощью разработанного метода и о постановке безопасности сложных систем.

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}. \quad (3)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

В работах приведена информация о достоверности численного моделирования нестационарных волн напряжений в областях различной формы с помощью разработанного метода, алгоритма и комплекса программ [1–4, 9–10].

Решение задачи о воздействии взрывной волны в объекте хранения опасных веществ с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пяти)

Рассмотрим задачу о воздействии взрывной волны (рис. 3) в объекте хранения опасных веществ с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пяти) (рис. 2).

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс см}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

По нормали к контуру $IJKL$ приложено нормальное напряжение σ_n , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$). На контуре JI приложено нормальное напряжение σ_y ($\sigma_y = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1 \text{ МПа}$ (1 кгс/см^2)). На контуре KL приложено нормальное напряжение σ_y ($\sigma_y = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$ (-1 кгс/см^2)).

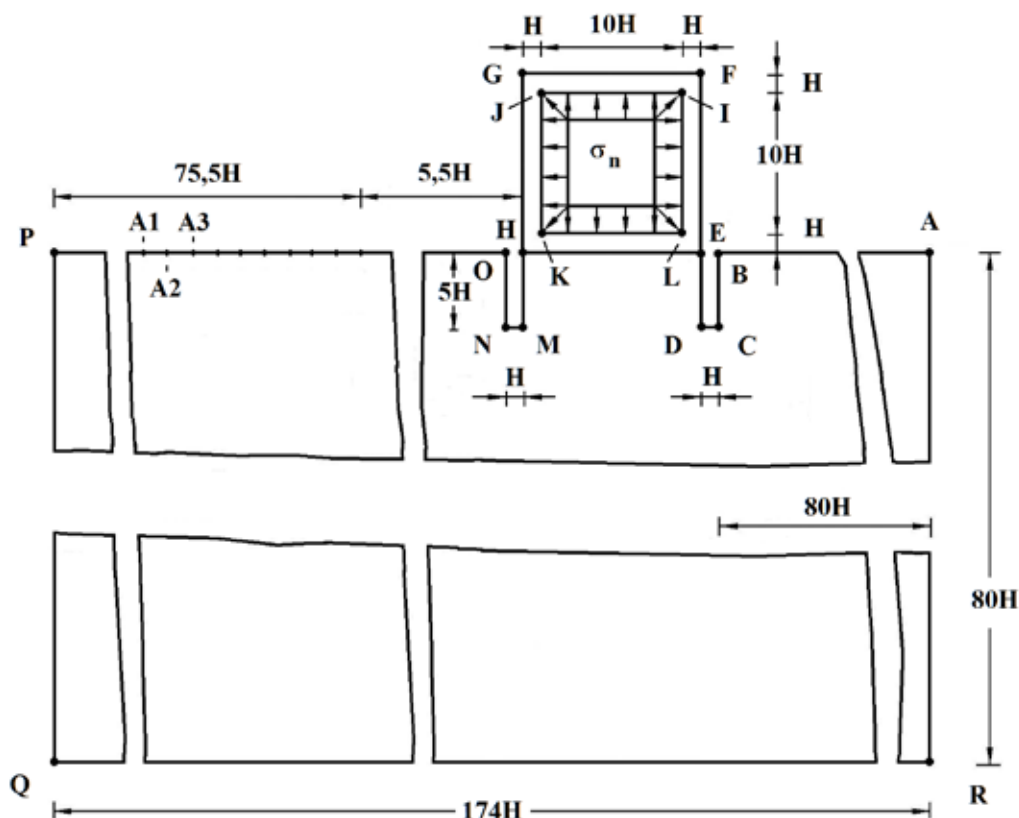


Рис. 2. Постановка задачи о воздействии упругой взрывной волны в объекте хранения опасных веществ с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пяти)

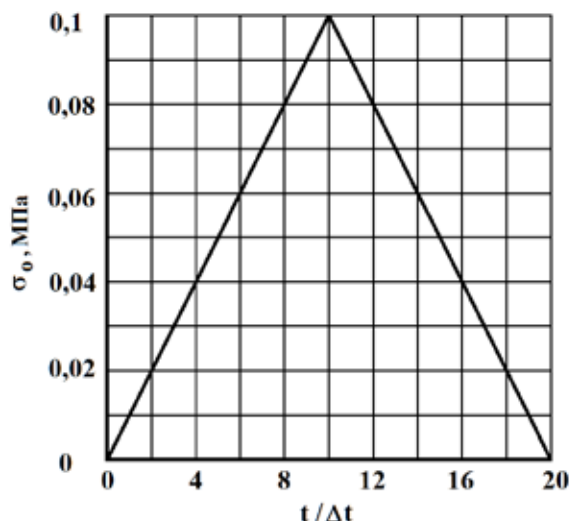


Рис. 3. Взрывное воздействие в виде типа дельта функции для задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к пяти)

На контуре IL приложено нормальное напряжение σ_x ($\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см²)). На контуре JK приложено нормальное напряжение σ_x ($\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура $PQRA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $PQRA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$.

Контур $ABCDEFGHLMNOP$ свободен от нагрузок.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с.

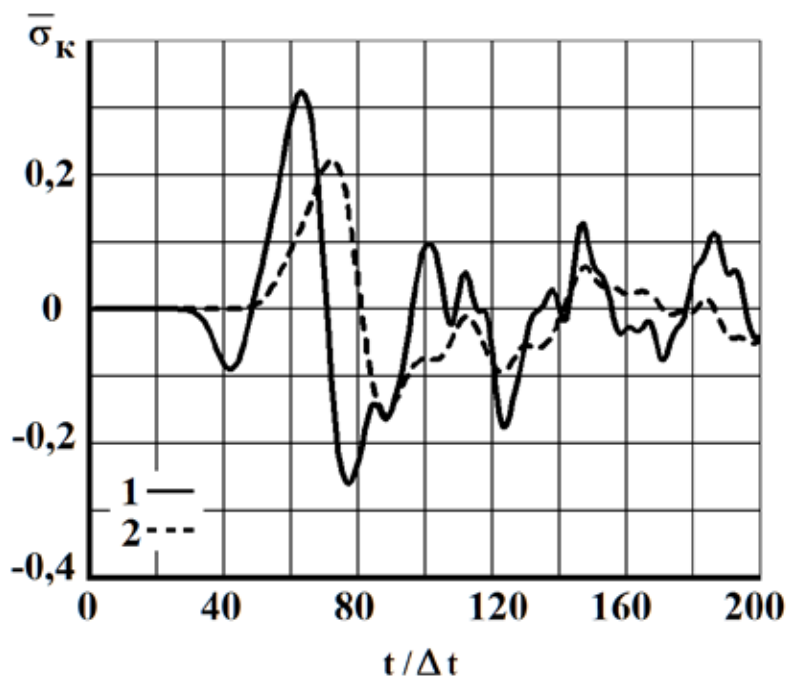


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t / \Delta t$ в точке $A1$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пяти)

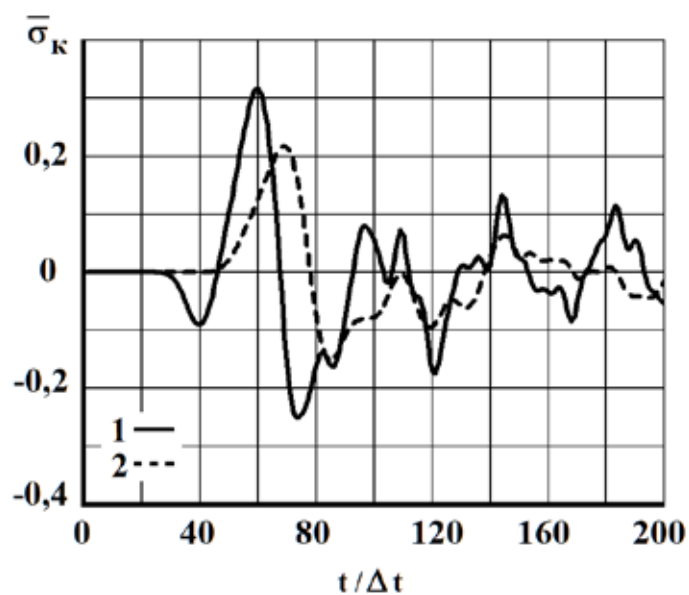


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_K$ во времени $t / \Delta t$ в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пяти)

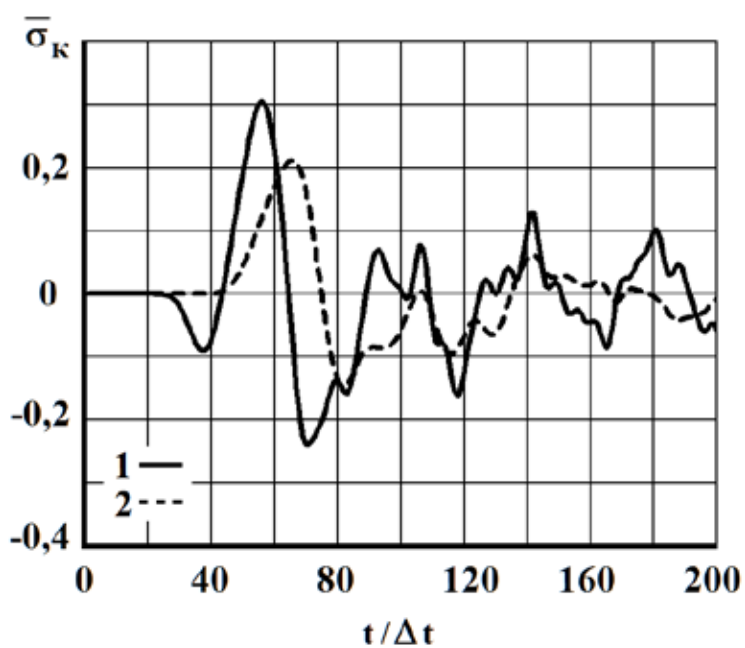


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_K$ во времени $t / \Delta t$ в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пяти)

Исследуемая расчетная область имеет 14250 узловых точек. Решается система уравнений из 57000 неизвестных.

На рис. 4–6 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n в точках $A1$ – $A3$ (рис. 2), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками: $A1$ и $A2$ равно H ; $A2$ и $A3$ равно H).

Выводы

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого растягивающего контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в 1,462 раза. Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого сжимающего контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в 1,66 раза.

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого растягивающего нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ в 1,51 раза. Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого сжимающего нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ в 1,84 раза.

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого растягивающего нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ в 1,52 раза. Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого сжимающего нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ в 1,81 раза.

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого растягивающего касательного напряжения $\bar{\tau}_{xy}$ в 1,81 раза. Полость, с соотношением ширины к высоте один к пяти, уменьшает величину упругого сжимающего касательного напряжения $\bar{\tau}_{xy}$ в 1,54 раза.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями

двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

2. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.

3. Мусаев В.К. Компьютерное моделирование задачи об отражении плоских продольных упругих, вязких и пластических волн напряжений в виде функции Хевисайда от свободной поверхности // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 81–93.

4. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

5. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

6. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–30.

7. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 2). – С. 220–223.

8. Мусаев В.К. Определение нестационарного напряженного состояния при вертикальном сосредоточенном взрывном воздействии на набережной речного порта с незаполненным водным объектом // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 88–92.

9. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 135–146.

10. Musayev V.K. On the mathematical modeling of nonstationary elastic waves stresses in corroborated by the round hole // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 147–156.