теме, которые включают изучение учебного материала по конспектам лекции и рекомендуемой литературе, работу с НД, решение ситуационных задач.

Тестовые задания по дисциплине включают тренажерные варианты тестов, которые могут быть использованы студентами для самоконтроля и подготовки к сдаче экзаменов.

Список литературы

1. Лифиц И.М. Стандартизация, метрология и подтверждение соответствия. – 10-е изд. – М.: Юрайт. 2012 – 393 с.

2. Николаева М.А. Стандартизация, метрология и подтверждение соответствия. – М.: ФОРУМ, 2010 – 335 с.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

Хлопков Ю.И.

Московский физико-технический институт, Жуковский, e-mail: zayyarmyomyint@gmail.com

В работе излагается обзор методов Монте-Карло, разработанных в вычислительной аэродинамике разреженного газа, и их применение в смежных, нетрадиционных для использования статистического моделирования, областях. Приводится краткая история развития методов, их основные свойства, достоинства и недостатки. Устанавливается связь прямого статистического моделирования аэродинамических процессов с решением кинетических уравнений и показывается, что современный этап развития вычислительных методов немыслим без комплексного подхода к разработке алгоритмов с учётом всех особенностей решаемой задачи: физической природы процесса, математической модели, теории вычислительной математики и стохастических процессов. Рассматриваются возможные пути развития методов статистического моделирования.

Общая схема методов Монте-Карло. Проявление методов статистического моделирования (Монте-Карло) в различных областях прикладной математики, как правило, связано с необходимостью решения качественно новых задач, возникающих из потребностей практики. Так было при создании атомного оружия, на первом этапе освоения космоса, исследовании явлений атмосферной оптики, физической химии, моделировании турбулентности. В качестве одного из более-менее удачных определений методов Монте-Карло можно привести следующее:

Методы Монте-Карло – это численные методы решения математических задач (систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) и прямое статистическое моделирование (физических, химических, биологических, экономических, социальных процессов) при помощи получения и преобразования случайных чисел.

Первая работа по использованию метода Монте-Карло была опубликована Холлом в 1873 году именно при организации стохастического процесса экспериментального определения числа π путём бросания иглы на лист линованной бумаги. Яркий пример использования методов Монте-Карло – использование идеи Дж. фон Неймана при моделировании траекторий нейтронов в лаборатории Лос Аламоса в сороковых годах прошлого столетия. Хотя методы Монте-Карло связаны с большим количеством вычислений, отсутствие электронной вычислительной техники ни в том ни в другом случае не смутило исследователей при применении этих методов, поскольку в том и другом случае речь шла о моделировании случайных процессов. И своё романтическое название они получили по имени столицы княжества Монако, знаменитой своими игорными домами, основу которых составляет рулетка – совершенный инструмент для получения случайных чисел. А первая работа, где этот вопрос излагался систематически, опубликована в 1949 году Метрополисом и Уламом, где метод Монте-Карло применялся для решения линейных интегральных уравнений, в котором явно угадывалось задача о прохождении нейтронов через вещество. В нашей стране работы по методам Монте-Карло стали активно публиковаться после Международной Женвской конференции по применению атомной энергии в мирных целях. Одной из первых можно привести работу Владимирова и Соболя.

Общая схема метода Монте-Карло основана на Центральной предельной теореме теории вероятности, утверждающей, что случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, равная сумме большого количества N произвольных случайных величин X_i с одинаковыми математическими ожиданиями m и дисперсиями σ^2, всегда распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $N{\cdot}m$ и дисперсией $N{\cdot}\sigma^2$. Предположим, что нам нужно найти решение какого либо уравнения или результат какого либо процесса I. Если сконструировать случайную величину ξ с плотностью вероятности $p(x)$ таким образом, чтобы математическое ожидание этой величины равнялось искомому решению $M(\xi) = I$, то это даёт простой способ оценки решения и погрешности

$$I = M(\xi) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда следуют общие свойства методов:

– абсолютная сходимость к решению, как $(1/N)$;

– тяжёлая зависимость погрешности ε от числа испытаний, как $\varepsilon \approx \left(1/\sqrt{N}\right)$ (для уменьшения погрешности на порядок, необходимо увеличить количество испытаний на два порядка);

– основным методом уменьшения погрешности является максимальное уменьшение дисперсии, другими словами, максимально приблизить плотность вероятности $p(x)$ случайной величины ξ к математической

формулировке задачи или физике моделируемого явления;

– погрешность не реагирует на размерность задачи (в конечно-разностных методах при переходе от одномерной задачи к трёхмерной количество вычислений увеличивается на два порядка, в то время как в методах Монте-Карло количество вычислений остаётся того же порядка);

– простая структура вычислительного алгоритма (N раз повторяющиеся однотипные вычисления реализаций случайной величины);

– кроме того, конструкция случайной величины ξ, вообще говоря, может основываться на физической природе процесса и не требовать обязательной, как в регулярных методах, формулировки уравнения, что для современных проблем становится всё более актуальным.

Особое место методы Монте-Карло занимают в вычислительной аэродинамике. Динамика разреженных газов описывается известным интегродифференциальным кинетическим уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}\nabla f = \int (f' \cdot f_1' - f \cdot f_1) \cdot \mathbf{g} \cdot b \cdot db \cdot d\varepsilon \cdot d\boldsymbol{\xi}_1,$$

где $f - f(t, x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$ функция распределения молекул по времени, координатам и скоростям; f', f_1' – функции распределения, соответствующие скоростям молекул после столкновения; ξ', ξ_1', g – относительные скорости молекул при парных столкновениях $g = \xi - \xi_1$, $\xi' - \xi_1'$; b, ε – прицельное расстояние и азимутальные угол при столкновениях частиц.

Сложная нелинейная структура интеграла столкновения и большое количество переменных (в общем случае – 7) создают существенные трудности для анализа, в том числе и численного и практически исключают конечно-разностный подход для серьёзных задач. И, в тоже время, многомерность и вероятностная природа кинетических процессов создают естественные предпосылки для применения методов Монте-Карло. Исторически развитие численных статистических методов в динамике разреженных газов шло по следующим трем направлениям: использование методов Монте-Карло для вычисления интегралов столкновения в регулярных конечно-разностнных схемах решения кинетических уравнений; прямое статистическое моделирование физического явления, которое разделяется на два подхода: моделирование траекторий «пробных частиц» по Хэвиленду и моделирование эволюции «ансамбля частиц» по Бёрду; построение случайного процесса типа процедуры Уалама – Неймана, описанной в, соответствующего решению линеаризованного кинетического уравнения либо Master Equation Каца .

Вероятностная природа аэродинамики разреженных газов так важная для применения и разработки численных схем Монте-Карло естественным образом следует из общих принципов кинетической теории и статистической физики.

В книге устанавливается связь прямого статистического моделирования аэродинамических процессов с решением кинетических уравнений и показывается, что современный этап развития вычислительных методов немыслим без комплексного подхода к разработке алгоритмов с учётом всех особенностей решаемой задачи: физической природы процесса, математической модели, теории вычислительной математики и стохастических процессов. Работа выполнена при поддержке РНФ (Грант № 14-11-00709).

РЕНОРМГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.

Московский физико-технический институт, Жуковский, e-mail: zayyarmyomyint@gmail.com

Вопросу теоретического описания турбулентных явлений посвящено множество монографий и научных статей, так как эта проблема оказывается неувядающей вот уже в течение более 150 лет. Время от времени появляются очень яркие новые идеи и методы, которые вдохновляют многочисленных исследователей на преодоление необычайных трудностей, связанных с пониманием сути проблемы. Тем не менее практическая важность хотя бы инженерного решения этой проблемы породила огромное число полуэмпирических моделей, в которых вопрос о сути проблемы не ставится, а делается подгонка результатов под определенный набор практически важных течений. При этом делается упор на описание средних моментов низкого порядка: средняя скорость, среднее давление, средняя кинетическая энергия, средние концентрации химических компонентов и т.п. Кроме того, развивалось моделирование, мотивацией которого была невозможность точного численного описания течений с очень большими числами Рейнольдса.

В последнее время был достигнут значительный прогресс в экспериментальном и теоретическом изучении анизотропных турбулентных течений, который позволяет вернуться к исходным проблемам, связанным с существом этого явления. Экспериментально были обнаружены когерентные структуры, которые представляют существенные элементы течений, оказывающих сильное влияние на различные физические характеристики потоков. Таким образом, течение разбивалось на глобально среднее течение, когерентную структуру и стохастический компонент. Были сделаны эксперименты, которые способствовали выявлению деталей когерентных структур. Стохастический же компонент стал теоретически связываться с так называемой