одно из элементарных событий, таким образом, E происходит всегда. Такое событие называется достоверным событием. Пустое множество ϕ не содержит элементарных событий и, следовательно, никогда не происходит. Такое событие называют невозможным событием.

Как правило, при использовании метода Монте-Карло моделируется случайные величины с известным законами распределения, из этих величин по заданным алгоритмам вычисляются значения существенно более сложных случайных величин, распределение которых уже не может быть найдено аналитически и используется методы математической статистики. При этом различают два подхода: параметрический и непараметрический. Параметрический подход предполагает, что искомое распределение известно с точностью до значений конечной числа параметров. Непараметрический подход используется когда параметрический вид плотности неизвестен, т.е. в тех случаях, когда информация о характере результатов либо практически отсутствует, либо имеет слишком общий характер.

Вероятная ошибка метода Монте-Карло пропорциональна $\sqrt{p\xi}/N$. Скорость убывания этой ошибкой с ростом N невелика. Поэтому важно научиться выбирать для расчета интегралов такие вычислительные или другими словами, такие случайные величины ξ, для которых дисперсия $D\xi$ по возможности будет мала. Способы построения таких схем называют методами уменьшения дисперсии, имея в виду, что для этих способ дисперсия должна быть меньше, чем дисперсия простейшего метода Монте-Карло. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (МОНТЕ-КАРЛО) (учебное пособие)

Хлопков Ю.И., Горелов С.Л.

Московский физико-технический институт, Жуковский, e-mail: zayyarmyomyint@gmail.com

Пособие основано на годовом курсе лекций, которые читаются на 3–6 курсах и в аспирантуре МФТИ. Приводятся основы метода Монте-Карло и приложения метода к различным задачам математики и механики. Излагаются основные методы решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, решение уравнений математической физики с помощью систем линейных алгебраических уравнений. Большое внимание уделяется решению задач аэродинамики (это оригинальные разработки авторов).

Быстрое развитие вычислительной техники стимулировало разработку численных методов статистического моделирования (методы Монте-Карло) широкого класса задач механики, физики, биологии, химии. Эти задачи условно можно разделить на два вида. К первому виду относятся задачи стохастической природы, когда метод Монте-Карло используется для прямого моделирования естественной вероятностной задачи. Ко второму виду относятся детерминированные задачи, описываемые вполне определенными уравнениями. В этом случае строится вероятностный процесс, математическое ожидание которого совпадает с решением соответствующего уравнения. Этот процесс численно моделируется методом Монте-Карло на ЭВМ, что позволяет получить решение в виде статистических оценок, о построение датчиков случайных чисел, о преобразовании случайных величин, о способах вычисления интегралов методом Монте-Карло, построение метода Монте-Карло для прямого статистического моделирования течений сильноразреженного бесстолкновительного газа. В данном пособий описываются способы построения методов Монте-Карло для различных уравнений, в частности, для решения систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений физики, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Рассматривается методы прямого статистического моделирования течений разреженного газа, описываемых уравнениями Больцмана, сплошносредных течений газа, описываемых уравнениями Эйлера, а также нестационарных турбулентной процессов, имеющих стохастическую природу.

Метод Хэвиленда основан на линеаризации исходной нелинейной задачи. Методы прямого статистического моделирования (Берд, Белоцерковский, Яницкий, Хлопков, Иванов, Лукшин). Недостатком метода Хэвиленда и его модификаций является то, что в его основе лежит разделение интеграла столкновения на две части, причем результат вычисления части интеграла столкновения, ответственного за убыль частиц (частота столкновения), вычисляется в предыдущей итерации, а часть интеграла столкновения вычисляется в последующей итерации, что приводит и появлению систематической ошибка в вычислении интеграла столкновений. В задачах, в которых определяющими являются процессы переноса, ошибки, возникающие в результате вычисления интеграла столкновения, мала влияют на решение задачи, и ими можно пренебречь. В случае, когда существенны релаксационные процессы, ошибки в вычислении интеграла столкновения становятся определяющими, что приводит к неверным результатам при решении соответствующих задач. Основным параметром, по которому можно судить о том, к какому классу относится та или иная задача, является параметр разреженности – число Кнудсена Kn, которое равно отношению длины свободного пробега λ к характерному размеру тече-

ния L. Если число Kn > 1, то число столкновений между молекулами газа в области течения мало, по сравнению с числом столкновений молекул с поверхностью тела, и ошибки в вычислении интеграла столкновений мало влияют на результат решения задачи. В случае Kn < 1 определяющими становятся процессы столкновения молекул в газе и ошибки в вычислении интеграла столкновения приводят сначала к увеличению количества итераций, необходимых для получения решений, а затем при уменьшении числа Kn и к невозможности получения решения.

Для того чтобы можно было решать задачи при произвольном числе Kn, были предложены методы прямого статистического моделирования.

В основе методов прямого статистического моделирования лежит допущение, что реальную среду, в которой количество молекул практически не ограничено, можно заменить средой, в которой задается система из конечного числа моделирующих частиц.

Расчетная область разбивается на ячейки с линейным размером λ меньшим местной длины свободного пробега. N частиц распределяются в начальный момент времени по ячейкам в соответствии с начальной функцией распределения. Эволюцию системы за малое время Δt можно расщепить на два этапа: релаксацию подсистем в ячейках столкновения частиц и последующее передвижение всех частиц пропорционально их скорости и Δt бесстолкновительный перелет. Стационарное распределение всех параметров среды вычисляется после установления процесса во времени и усреднения по всем частицам и временным шагам.

Так, например, плотность n, скорость V, температура T каждой ячейке на некотором шаге определяются по формулам

$$n = \frac{n_1}{N_0}; \quad V = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} C_j;$$

$$T = \frac{2}{3}\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2}\left(C_j - 1\right),$$

где N_1 – число частиц в ячейке в момент времени t; N_0 – начальное число частиц; C_j – скорость j-й частицы; m – масса частицы.

Таким образом, алгоритм методов прямого статистического моделирования состоит на двух этапов:

1 этап: столкновения частиц в ячейках,

3 этап: свободномолекулярный перенос.

Этап свободномолекулярного переноса осуществляется так же как и в случае метода Хэвиленда, то есть частицы передвигаются из ячейки и ячейку пропорционально своим скоростям. Если обозначить конечные координаты частиц X'_1, а начальные X, $i = 1, ..., N$, то

$$X'_1 = X_1 + C_1\Delta t.$$

Во время этого этапа частицы могут покинуть расчетную область, столкнуться с поверхностью тела, в этом случае они отражаются от поверхности тела со скоростями, соответствующими граничной функции распределения. В момент столкновения с поверхностью вычисляются импульс и энергии, приносимые на поверхность тела. На этом этапе в области появляются частицы со скоростями, соответствующими функций распределения на внешней границе расчетной области.

Наиболее сложным для реализации в методах прямого статистического моделирования является 1 этап – столкновения частиц в ячейках. На этом этапе в каждой ячейке задана система из N частиц со скоростям C_1, ..., C_N. Система может переходить из одного состояния в другое только посредством столкновения частиц. Задача этапа состоит в том, чтобы найти скорости частиц через время Δt.

Отметим, что перспективность использования метода прямого статистического моделирования связана с построением кинетических моделей турбулентности, замкнутых на уровне функции распределения пульсаций. Такие модели имеют, как правило, меньше число эмпирических констант. В то же время кинетические модели более информативны, так как они дают функцию распределения пульсаций.

Данное направление интенсивно развивается, в частности, можно надеяться на успех в решении более сложных задач турбулентности, когда крупно масштабные процессы вычисляются непосредственно по схемам расщепления для конечно-разностных уравнений переноса (например, с помощью метода крупных частиц или потоков), а локальные мелкомасштабные флуктуации моделируются статистическим путем. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (Проект № 14-11-00709).

РУКОВОДСТВО ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ АНАЛИТИКЕ

Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.

Московский физико-технический институт, Жуковский, e-mail: zayyarmyomyint@gmail.com

В данном руководстве рассматривается пакет программ MATHEMATICA (Wolfram Research). Он замечателен тем, что на его примере легко освоить все имеющиеся к настоящему времени версии. Кроме того, он достаточно содержателен, чтобы его помощью можно было выполнять сложные операции, встречающиеся в повседневной практической деятельности, и не требует много места на жестком диске.

Руководство составлено на основе практики преподавания компьютерной аналитики на факультете аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института.