Физико-математические науки

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Артемов М.А., Бердзенишвили Г.Г., Якубенко А.П.

Воронежсский государственный университет, Воронеж, e-mail: artemov_m_a@mail.ru

Оптимальное управление течением вязкоупругих сред представляет интерес, как в теоретических исследованиях, так и при решении многих прикладных задач. В данной заметке обсуждаются условия, при которых разрешима нелинейная система, описывающая оптимальное управление течением жидкости типа Олдройда [1] в ограниченной области трёхмерного пространства. Постановка задачи оптимизации обобщает известные постановки А.В. Фурсикова [2] для системы уравнений Навье–Стокса. В качестве управляющих параметров используются внешняя сила **f**, действующая на поток, и распределение скоростей **v** на границе области, в которой происходит течение. Управляющие параметры выбираются из заданного множества пар допустимых управлений. При надлежащем выборе функциональных пространств и обобщённой (слабой) формулировке соответствующей краевой задачи (по поводу определения слабых решений для модели Олдройда см. [3–6]) удается установить разрешимость управляемой системы, т. е. показать существование допустимых пар «управление-состояние». Следующий шаг – это решение задачи оптимизации, т.е. нахождение пары «управление-состояние», на которой достигается минимум заданного функционал качества. Основной результат работы: если множество допустимых управлений ограничено и замкнуто в соответствующем пространстве, функционал качества ограничен снизу, слабо полунепрерывен снизу и удовлетворяет условию коэрцитивности (см. условие (5.10) в [2]), то задача оптимизации разрешима и множество решений слабо замкнуто.

Отметим, что близкая по постановке задача оптимизации рассматривается в [7]. Кроме того, в работе [8] установлена аппроксимативная управляемость (с границы) для линеаризованных уравнений модели Олдройда.

Список литературы

1. Joseph D.D. Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids. Berlin, Springer-Verlag, 1990. – 754 p.

2. Фурсиков А.В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Математический сборник. – 1981. – Т. 115, № 2. – С. 281–306.

3. Турганбаев Е.М. Начально-краевые задачи для уравнений вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т.36, № 2. – С. 444–458.

4. Барановский Е.С. Неоднородная краевая задача для стационарных уравнений модели Джеффриса движения вязкоупругой среды // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15, № 3. – С. 16–23.

5. Барановский Е.С. О стационарном движении вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, № 6. – С. 3–16.

6. Барановский Е.С. Задача оптимального управления стационарным течением среды Джеффриса при условии проскальзывания на границе // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, – № 1. – С. 18–27.

7. Барановский Е.С. Задача оптимального граничного управления для уравнений движения полимерных растворов // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 13–27.

8. Doubova A., Fernandez-Cara E. On the control of viscoelastic Jeffreys fluids // Systems & Control Letters. – 2012. – Vol. 21. – P. 573–579.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА В УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

Артемов М.А., Бабкин С.В., Крыжко И.Б.

Воронежсский государственный университет, Воронеж, e-mail: artemov_m_a@mail.ru

В заметке обсуждается начально-граничная задача для системы уравнений, определяющей динамику вязкоупругой жидкости типа Кельвина-Фойгта [1] в предположении, что на границе области течения имеет место регулярное проскальзывание [2]. Модель движения жидкости Кельвина-Фойгта представляет собой систему уравнений третьего порядка, не разрешенную относительно старшей производной по времени. Эта система регуляризует трехмерные нестационарные уравнения Навье-Стокса при больших градиентах скоростей [3]. Условие регулярного проскальзывания предполагает, что мгновенная ось вращения жидкости в каждой точке границы совпадает с вектором нормали к границе.

Основной результат работы: теорема о существовании и единственности слабого глобального по времени решения. Для построения слабого решения используется метод Фаэдо-Галеркина. Для приближенных решений удается получить более сильные, чем в случае уравнений Навье-Стокса, априорные оценки. Это связано с наличием в уравнениях движения жидкостей Кельвина-Фойгта нестационарных членов, учитывающих релаксационные свойства среды. На основе полученных оценок и обобщенной теоремы Асколи [4] доказана сходимость приближенных решений к слабому решению исходной задачи. Кроме того, установлена единственность слабого решения.

Отметим, что однозначная разрешимость начально-граничной задачи для уравнений движения жидкости Кельвина-Фойгта с однородным граничным условием установлена А.П. Осколковым [3]. Задачи с неоднородными граничными условиями для этой модели и некоторых её обобщений рассматриваются в работах [5–9].

Список литературы

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
2. Алексеенко С.Н. Слабое решение системы Навье-Стокса с условием регулярного проскальзывания вдоль части границы // Исслед. по интегродифф. уравнениям. – 1991. – Т. 23. – С. 90–103.
3. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1973. – Т. 38. – С. 98–136.
4. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. – 1986. – V. 146. № 1. – P. 65–96.
5. Кузьмин М.Ю. О краевых задачах некоторых моделей гидродинамики с условиями проскальзывания на границе: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2007. – 106 с.
6. Барановский Е.С. Исследование математических моделей, описывающих течения жидкости Фойгта с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 77–93.
7. Барановский Е.С. Задача оптимального граничного управления для уравнений движения полимерных растворов // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 13–27.
8. Барановский Е.С. О течении полимерной жидкости в области с непроницаемыми границами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 10. – С. 1648–1655.
9. Артемов М.А., Барановский Е.С. Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 1–11.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ У ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Михайлова Е.Е., Вощинская Г.Э.

Воронежский государственный университет, Воронеж, e-mail: mikhaylova_e_e@mail.ru

При выборе цилиндрической системы координат r, θ, z рассматривается задача об упругопластическом состоянии цилиндрической области ($a \le r \le b$), на границах которой $r = a$ и $r = b$ заданы давления p_a и p_b соответственно.

Режим пластичности $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$, $\sigma_\theta - \sigma_z < 2k$, $\sigma_z - \sigma_r < 2k$ для условия пластичности Треска, реализуется в пластической области, если $p_a - p_b \ge k(1 - a^2/b^2)$. При этом значение давления p_a может изменяться в пределах $-2vk/(1-2v) < p_a < 2(1-v)k/(1-2v)$. Нарушение этого условия приводит к тому, что при $r = a$ выбранный режим пластичности не реализуется.

Ширина пластической зоны $a \le r \le c$, в которой реализуется только указанный режим пластичности, ограничена $c \le c1 = a\exp(p_a/(2k) + v/(1-2v))$. Причем $\max(c1) = a\exp(1/(1-2v))$. При $b < c1$, то радиус упругопластической границы находится из решения уравнения $p_a - p_b = k(1 + 2\ln(c/a) - c^2/b^2)$.

Вопросы, близкие к данному сообщению, рассматривались в работах [1–8].

Список литературы

1. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – С. 75–95.
2. Артемов М.А., Потапов Н.С., Якубенко А.П. Следствия нормального закона пластического течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 9. – С. 145–147.
3. Артемов М.А., Бестужева Н.П., Потапов Н.С. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
4. Артемов М.А., Ларин И.А. Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 7. – С. 39–42.
5. Артемов М.А., Потапов Н.С. Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле в случае плоского напряженного состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2009. Т. 5. № 8. С. 25-29.
6. Артемов М.А., Ивлев Д.Д. Об одном случае предельного состояния тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45.
7. Артемов М.А., Потапов Н.С., Якубенко А.П. Условие полной пластичности и ассоциированный закон деформирования // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 9. – С. 18–23.
8. Киликовская О.А., Овчинникова Н.В. Влияние упрочнения и сжимаемости материала на решение упругопластических задач о деформировании пространства с цилиндрической полостью // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2012. – № 1. – С. 75–91.