

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВИДЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ (ПЕРВАЯ ВЕТВЬ: ВОСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЧЕТВЕРТЬ КРУГА, НИСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЧЕТВЕРТЬ КРУГА; ВТОРАЯ ВЕТВЬ: ВОСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЛИНЕЙНАЯ, НИСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЛИНЕЙНАЯ) В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

**Мусаев В.К.**

*МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Приводится некоторая информация моделирования нестационарных упругих волн в полуплоскости при импульсном воздействии (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга; вторая ветвь: восходящая часть – линейная, нисходящая часть – линейная). для решения поставленной задачи применяются волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. на основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны численный метод, алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных динамических воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Применяется квазирегулярный подход при аппроксимации исследуемой области. Приводятся нормальные напряжения в характерных точках упругой полуплоскости.

**Ключевые слова:** нестационарные упругие волны, волновые уравнения, динамика сплошных сред, распространение волн, волновая теория, взаимодействие с границами, полуплоскость, неотражающие граничные условия, алгоритмический язык Фортран-90, численный метод, алгоритм, комплекс программ, квазирегулярный подход, аппроксимация исследуемой области, исследуемая область, условия на фронте плоской волны, импульсное воздействие, напряжения на фронте плоской волны

**THE SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE PROPAGATION OF PLANE LONGITUDINAL WAVES IN THE FORM OF PULSE EXPOSURE (THE FIRST BRANCH: A RISING PART, A QUARTER CIRCLE, THE DESCENDING PORTION IS A QUARTER OF A CIRCLE; THE SECOND BRANCH: ASCENDING PART IS LINEAR DESCENDING PORTION – LINEAR) IN AN ELASTIC HALF-PLANE**

**Musayev V.K.**

*MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Provides a bit of information modeling non-stationary elastic waves in a half-plane with pulse action (the first branch: a rising part, a quarter circle, the descending portion is a quarter of a circle; the second branch: ascending part is linear descending portion – linear). To solve the set tasks apply to the wave equations of solid mechanics. On the basis of the finite element method of numerical methods, algorithms and software for solving linear flat two-dimensional problems, which allow us to solve problems with non-stationary dynamic effects in complex systems. When developing complex programs used algorithmic language Fortran-90. Applied quasi-regular approach in approximating the study area. Given normal stress at characteristic points of the elastic half-plane.

**Keywords:** non-stationary elastic waves, wave equations, dynamics of continuous media, wave propagation, wave theory, the interaction with the boundaries, the half-plane, non-reflecting boundary conditions, the algorithmic language Fortran-90, and numerical method, an algorithm, a set of programs, quasi-regular approach, approximation study area, study area, the conditions at the front of the plane wave, the current pulse, the voltage at the front of the plane wave

**Постановка задачи при нестационарных волновых воздействиях**

В настоящее время оценка точности и достоверности моделирования быстропротекающих процессов в областях различной формы является приоритетной задачей фундаментальной и прикладной науки. Некоторая информация о постановке и численной реализации нестационарных волновых задач механики деформируемого твердого тела приведена в следующих работах [1–10]. для решения задачи о моделиро-

вании упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело  $\Gamma$  в прямоугольной декартовой системе координат  $XOY$ , которому в начальный момент времени  $t=0$  сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело  $\Gamma$  изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора упругих напряжений;  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $u$  и  $v$  – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей  $OX$  и  $OY$  соответственно;  $\rho$  – плотность материала;

$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$  – скорость продольной упругой волны;  $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$  – скорость поперечной упругой волны;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $S (S_1 \cup S_2)$  – граничный контур тела  $\Gamma$ .

Систему (1) в области, занимаемой телом  $\Gamma$ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

### Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела  $\Gamma$ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \bar{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где  $\bar{H}$  – диагональная матрица инерции;  $\bar{K}$  – матрица жесткости;  $\vec{\Phi}$  – вектор узловых упругих перемещений;  $\dot{\vec{\Phi}}$  – вектор узловых упругих скоростей перемещений;  $\ddot{\vec{\Phi}}$  – вектор узловых упругих ускорений;  $\bar{R}$  – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнение (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \quad (3)$$

Шаг по временной переменной координате  $\Delta t$  выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где  $\Delta l$  – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

Предложен квазирегулярный подход к решению систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области. Методика основывается на схемах: точка; линия; плоскость.

В работах [1–6, 8–9] приведена информация о физической достоверности и математической точности применяемого численного метода, алгоритма и комплекса программ при решении задач моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах различной формы.

### Моделирование распространения плоских продольных упругих волн в полуплоскости

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде импульсного воздействия (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга; вторая ветвь: восходящая часть – линейная, нисходящая часть – линейная) (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1).

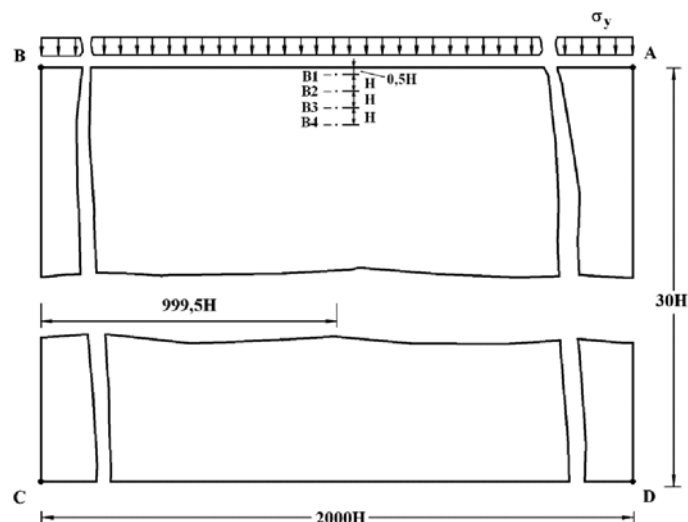


Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных волн в упругой полуплоскости

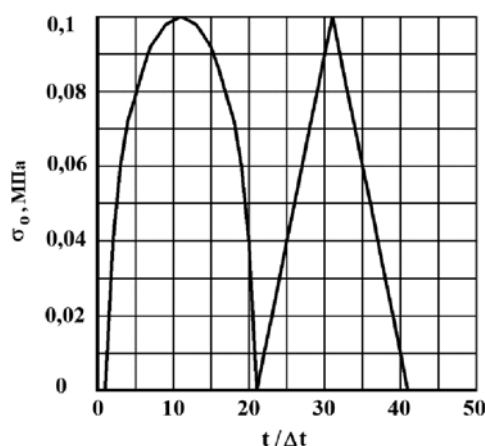


Рис. 2. Импульсное воздействие (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга; вторая ветвь: восходящая часть – линейная, нисходящая часть – линейная)

На границе полуплоскости  $AB$  приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $1 \leq n \leq 11$  ( $n = t / \Delta t$ ) изменяется от 0 до  $P$ , при  $11 \leq n \leq 21$  изменяется от  $P$  до 0, при  $21 \leq n \leq 31$  изменяется от 0 до  $P$  и при  $31 \leq n \leq 41$  изменяется от  $P$  до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контура  $BCDA$  при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контура  $BCDA$  не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 80$ . Расчеты проведены при следующих исходных данных:  $H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 9,263 \cdot 10^{-7}$  с;  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,34$ ;  $\rho = 2,755 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;

$C_p = 5398$  м/с;  $C_s = 3078$  м/с. Исследуемая расчетная область имеет 62031 узловую точку. Решается система уравнений из 248124 неизвестных.

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны. Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. Тогда из этих точек во все стороны начинают излучаться волны. на некотором расстоянии от центра возмущения рассматриваемые волны можно представить как плоские. Тогда все частицы движутся параллельно направлению распространения волны. Такие волны принято считать плоскими.

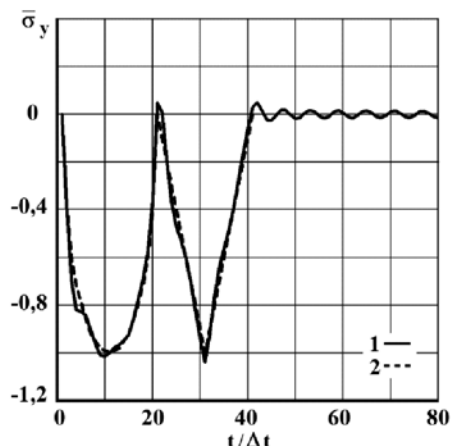


Рис. 3. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В1: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

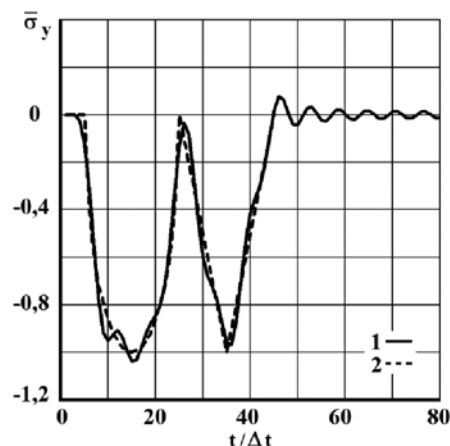


Рис. 5. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В3: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

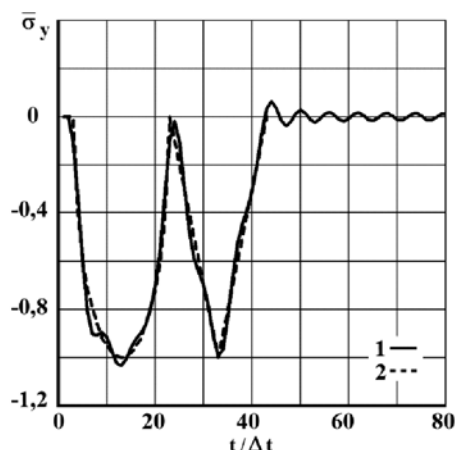


Рис. 4. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В2: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

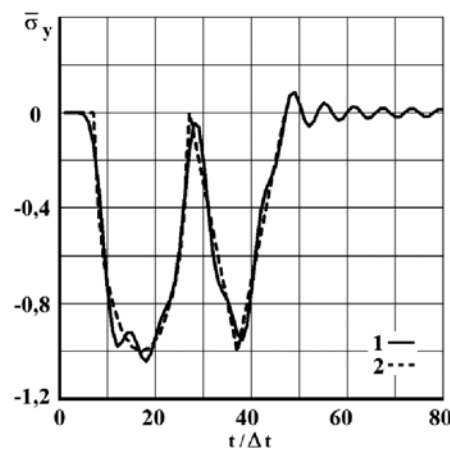


Рис. 6. Изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В4: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния  $\sigma_x = -|\sigma_0|$  и  $\sigma_y = -\nu|\sigma_0|$ . Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию  $\sigma_0$  (рис. 2). На рис. 3–6 показано изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t / \Delta t$  в точках В1–В4: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение.

Для упругих нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической

достоверности и математической точности результатов численного решения задачи о распространении нестационарных упругих волн в деформируемых телах.

### Выводы

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при воздействии нестационарных волн напряжений на различные объекты. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Решена задача о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия в упругой полуплоскости. Исследуемая расчетная область имеет 62031 узловую точку. Решается система уравнений из 248124 неизвестных. Для решения поставленной задачи используется импульсное воздействие (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга; вторая ветвь: восходящая часть – линейная, нисходящая часть – линейная).

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о физической достоверности и математической точности результатов численного решения полученных, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задач о распространении нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах.

#### Список литературы

1. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
2. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика, 1997, № 1, С. 87–110.
3. Мусаев В.К. об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.
4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
5. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.
6. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
8. Мусаев В.К. Оценка достоверности численного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в областях сложной формы // Материалы Всероссийской конференции «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 94–103.
9. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015, № 2. – С. 93–97.
10. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 2). – С. 220–223.