

Физико-математические науки

**БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ
ГИДРОДИНАМИКИ
В КООРДИНАТАХ ЭЙЛЕРА**

Балданова Д.М., Танганов Б.Б.

Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления, Улан-Удэ,
e-mail: darbal@rambler.ru

В данной работе показывается получение основных уравнений гидродинамики [1] в рамках формальной единой структуры, определяемой координатами Эйлера.

Для описания состояния некоторой системы используется произвольная функция $\Phi(t, q, p)$ в координатах Эйлера $t, q(x, y, z)$ и $p(p_x, p_y, p_z)$.

Эволюция систем во времени обеспечивает полную производную Φ по времени:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p} = St\Phi \geq 0, \quad (1)$$

где $V = \frac{dq}{dt}$ – скорость, $\frac{dp}{dt} = F$ – сила и $St\Phi$ – интеграл столкновений, формализующий эволюцию систем из равновесного состояния в неравновесное состояние и обратно. Так при $St\Phi = 0$ система находится в состоянии равновесия, при $St\Phi > 0$ – система неравновесна.

Уравнение непрерывности. В данном случае в (1) возможно аппроксимация $\Phi = \rho$ как плотности массы при $St\rho = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0, \quad (2)$$

где $F = \frac{dp}{dt} < 0$ – сила; $p = \rho V$ – импульс. Тогда выражение (2) примет вид

$$\frac{dp}{dt} = \left(\rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \right).$$

Поскольку $\frac{dp}{dt} = St\rho = 0$, то второе слагаемое $V \frac{d\rho}{dt} = 0$. Следовательно, $\frac{dp}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$. При подстановки данного выражения в (2) и с последующим использованием теоремы о перебросе производной, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{\partial^n \rho}{\partial q^n} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \frac{\partial^n V}{\partial q^n}.$$

При $n = 1$ приводим (2) к уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \text{grad} \rho + \rho \cdot \text{div} V = 0. \quad (3)$$

В сокращенном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} j = 0,$$

где $j = \rho V$ – плотность потока жидкости.

Уравнение движения в гидродинамике. Решение данной задачи требует в (1) представления $\Phi = p = \rho V$ как гидродинамического импульса. При этом ρ – плотность жидкости. Тогда

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \cdot \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0. \quad (4)$$

В гидродинамике, силу $\frac{dp}{dt}$ представляют в виде градиента давления P если движение жидкости происходит только лишь под действием давления P :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q} = \nabla P.$$

Для движения реальной жидкости надо учитывать еще и гравитационную силу Ньютона $\rho \nabla \Phi$, где Φ – потенциальная энергия единицы массы жидкости и силу сопротивления в виде силы вязкости $\eta \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = \eta \nabla^2 V$, где η – вязкость.

Для многих задач, особенно при малых скоростях V , можно считать жидкость несжимаемой $\text{div} V = 0$. При этих условиях, уравнение движения приобретает следующий вид:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \cdot \frac{\partial V}{\partial q} + \nabla P + \rho \nabla \Phi - \eta \nabla^2 V = 0. \quad (5)$$

Данное выражение можно представить в форме:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \cdot \frac{\partial V}{\partial q} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \eta \nabla^2 V. \quad (6)$$

Уравнение Навье-Стокса. Данное уравнение является основным в гидродинамике. Оно описывает зависимость скорости движения жидкости V от различных факторов, рассмотренных выше. Очевидно, что (6) можно дать в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 V, \quad (7)$$

где $\frac{\eta}{\rho}$ – удельная вязкость. Для вывода уравнения Навье-Стокса необходимо воспользоваться некоторыми правилами векторного анализа для слагаемого $V \cdot \frac{\partial V}{\partial q}$:

$$V \frac{\partial V}{\partial q} = V \cdot \text{div} V = (\nabla \times V) \times V + \frac{1}{2} \nabla v^2. \quad (8)$$

Здесь $(\nabla \times V) = \Omega$ – векторный потенциал вихревого поля скорости V и $V \cdot V = v^2$ – скалярное произведение двух векторов V .

Таким образом, равенство (7) можно представить, с учетом (8), в стандартной форме уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial V}{\partial q} + \Omega \times V + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \varphi + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 V. \quad (9)$$

Уравнение Бернулли. Это уравнение описывает стационарный поток жидкости при $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, отсутствии турбулентности $\Omega = \nabla \times V = 0$ и силы вязкости $\eta \nabla^2 V = 0$. Тогда упрощение по $\nabla = \frac{\partial}{\partial q}$ уравнения (9) дает уравнение или теорему Бернулли:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi = \text{const}. \quad (10)$$

Уравнение Эйлера. Данное уравнение является уравнением идеальной жидкости, для которой в выражении (9):

$$\Omega \times V + \frac{1}{2} \nabla v^2 = V \frac{\partial V}{\partial q},$$

$$\nabla \varphi = 0 \text{ и } \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 V = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (11)$$

Уравнение гидростатики. Гидростатика предполагает, что в выражении (9) во всех слагаемых $V = 0$. Тогда оно приобретает вид:

$$\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0. \quad (12)$$

Таким образом, все базовые уравнения гидродинамики имеют одну и ту же формальную основу в виде соотношения (1).

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука. 1986. – 736 с.

«Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники»,

Австрия (Вена-Зальцбург), 22 июня – 1 июля 2015 г.

Биологические науки

ВТОРИЧНЫЕ СРАЩЕНИЯ БРЮШИНЫ И МОРФОГЕНЕЗ БРЫЖЕЕЧНЫХ ЛИМФАТИЧЕСКИХ УЗЛОВ У ЧЕЛОВЕКА И НЕКОТОРЫХ ГРЫЗУНОВ

Петренко В.М.

Российская академия естествознания,
Санкт-Петербург, e-mail: deptanatomy@hotmail.com

Закладка лимфатических узлов (ЛУ), главным образом верхних брыжеечных у человека,

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ МОНТЕ-КАРЛО

Потлов А.Ю.

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов,
e-mail: zerner@yandex.ru

Прошедшее через биологическую ткань оптическое излучение содержит полезную информацию о форме, размерах, местоположении и оптических свойствах структурных компонентов ткани. В связи с этим, актуальным является изучение закономерностей прохождения излучения через модельные объекты [1] и уточнение существующих приближенных моделей переноса излучения.

В данной работе для моделирования миграции фотонов в биологических тканях предлагается использовать метод статистических испытаний Монте-Карло [2], отличающийся тем, что параметр оптической анизотропии моделируемой среды представлен не как константа, а как функция от пространственной координаты. Патологии, (такие как, например, лимфосаркома, саркома мышечной ткани и т.п.) как правило, состоят из примерно одинаковых по размеру овальных или округлых клеток, и поэтому не проявляют явно выраженных анизотропных свойств. В тоже время здоровая биологическая ткань отличается сильной оптической анизотропией и рассеивает излучение преимущественно вперед. Таким образом, представление параметра оптической анизотропии, как функции от пространственной координаты, приводит к существенному повышению адекватности результатов моделирования распространения излучения, анализ которых позволяет точнее объяснять результаты экспериментов по светорассеянию и открывает возможности для создания удобных методов экспресс регистрации оптических неоднородностей.

Список литературы

1. Potlov A.Y., Frolov S.V., Proskurin S.G. Movement of the photon density normalized maximum in homogeneous and inhomogeneous media with tissue-like optical properties // Laser Physics. – 2015. – Vol. – 25. – №3. – p. 035601.
2. Chen J. Optical tomography in small animals with time-resolved Monte-Carlo methods: Ph.D. Thesis.–2003. – p.166.

описана во многих работах разных авторов. Но механика этого процесса, связь его с органо-генезом оставались вне зоны внимания исследователей.

По моим данным, брыжеечные ЛУ у грызунов (белая крыса, морская свинка и дегу) определяются главным образом в коротком общем корне брыжеек тонкой и толстой кишок. Он протягивается от двенадцатиперстно-тощекишеч-