УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЙ ЛАВИНЫ С ПОМОЩЬЮ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ УДАРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Для прогноза безопасности защитных сооружений от ударной волны лавины применяется численное моделирование. Решена задача о распространении плоских продольных упругих волн напряжений в полуплоскости. Приводится постановка задач о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение без полости и с полостью. Ударное воздействие моделируется в виде трапеции. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши.

Ключевые слова: прогноз безопасности, защитное сооружение, ударная волна, лавина, численное моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ Мусаева В.К., вертикальная полость, нестационарные волны, волновая теория ударной безопасности, прямоугольный импульс, задача Коши, метод сквозного счета, однородный алгоритм, переходной процесс

MATHEMATICAL MODELING OF TECHNICAL MEANS OF PROTECTION OF THE ENVIRONMENT FROM THE EFFECTS OF AN AVALANCHE WITH THE WAVE THEORY OF IMPACT SAFETY

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

To forecast safety protective structures from shock waves avalanches of applied numerical modeling. Solved the problem of propagation of plane longitudinal elastic stress waves in a half-plane. A formulation of problems of elastic impact of a shock wave from an avalanche on protective structure without a cavity and with the cavity. The impact is modeled in the form of a trapezoid. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions we use the method of finite elements in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem.

Keywords: forecast security, defense, shock wave, avalanche, numerical simulation, numerical method, algorithm, software complex Musayev V.K., vertical cavity, transient waves, the wave theory of impact security, a rectangular pulse, Cauchy problem, method of through computation, homogeneous algorithm, the transition process

В работах [1–10] приведена информация о моделировании нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [5–8].

В последние годы в нашей стране и за рубежом уделяется большое внимание проблемам безопасности и надежности защитных сооружений от ударных воздействий лавины.

В работе применяется один из возможных технических средств защиты сооружений от ударных воздействий лавины – полости в окрестности предполагаемого сооружения.

Постановка задачи с начальными и граничными условиями

Для решения задачи о моделировании нестационарных волн в упругих деформируемых средах рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \sigma_x, \tau_{xy} \\ \tau_{xy}, \sigma_y \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Vmatrix} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix}, \ (x, y) \in \Gamma,$$

$$\begin{Vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} C_p^2, & C_P^2 - 2C_S^2, & 0 \\ C_P^2 - 2C_S^2, & C_p^2, & 0 \\ 0, & 0, & C_S^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix}, \ (x, y) \in (\Gamma \cup S), \qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S\ (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \ \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \ \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \qquad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (4)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5\frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,...), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Постановка задач о воздействии ударной волны от лавины на защитное сооружение

Рассмотрена постановка задач о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение без полости и для трех вариантах с полостью.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см^2 ≈ 0,1 МПа; 1 кгс с^2/см^4 ≈ 10^9 кг/м^3.

Расчеты проведены при следующих исходных данных:

$$H = \Delta x = \Delta y;\ \Delta t = 1{,}393 \cdot 10^{-6}\ \text{с};$$

$$E = 3{,}15 \cdot 10^4\ \text{МПа}\ (3{,}15 \cdot 10^5\ \text{кгс/см}^2);$$

$$\nu = 0{,}2;\ \rho = 0{,}255 \cdot 10^4\ \text{кг/м}^3$$

$$(0{,}255 \cdot 10^{-5}\ \text{кгс с}^2/\text{см}^4);\ C_p = 3587\ \text{м/с};$$

$$C_s = 2269\ \text{м/с}.$$

1. Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны от лавины (рис. 2) на защитное сооружение без полости (рис. 1). На контуре *CB* приложено нормальное воздействие σ_x, которое при $0 \le n \le 11$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до *P*, при $11 \le n \le 30$ равно *P* и при $30 \le n \le 40$ от *P* до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (–1 кгс /см^2)). Граничные условия для контура *FGHA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *FGHA* не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 200$. Контуры *DEF* и *BA* свободны от нагрузок, кроме точки *B*, где приложено воздействие. Исследуемая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных.

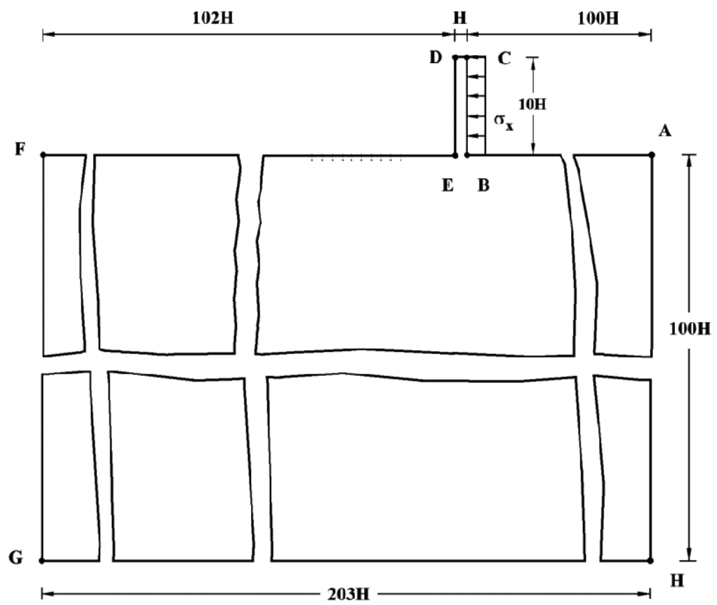

Рис. 1. Постановка задачи о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение без полости

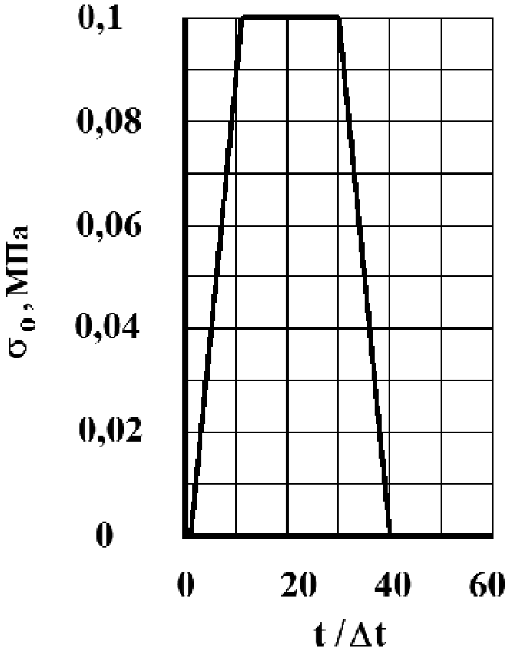

Рис. 2. Ударное воздействие в виде трапеции

2. Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны от лавины (рис. 2) на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пяти) (рис. 3).

На контуре *CB* приложено нормальное воздействие σ_x, которое при $0 \leq n \geq 11$ ($n = t / \Delta t$) изменяется от 0 до *P*, а при $11 \leq n \leq 30$ равно *P* и при $30 \leq n \leq 40$ изменяется от *P* до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (–1 кгс /см^2)). Граничные условия для контура *JKLA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *JKLA* не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контуры *DEFGHIJ* и *BA* свободны от нагрузок, кроме точки В, где приложено воздействие. Исследуемая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных.

3. Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны от лавины (рис. 2) на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к десяти) (рис. 4). На контуре *CB* приложено нормальное воздействие σ_x, которое при $0 \leq n \leq 11$ ($n = t / \Delta t$) изменяется от 0 до *P*, при $11 \leq n \leq 30$ равно *P* и при $30 \leq n \leq 40$ изменяется от *P* до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (–1 кгс /см^2)). Граничные условия для контура *JKLA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *JKLA* не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контуры *DEFGHIJ* и *BA* свободны от нагрузок, кроме точки *B*, где приложено воздействие. Исследуе-

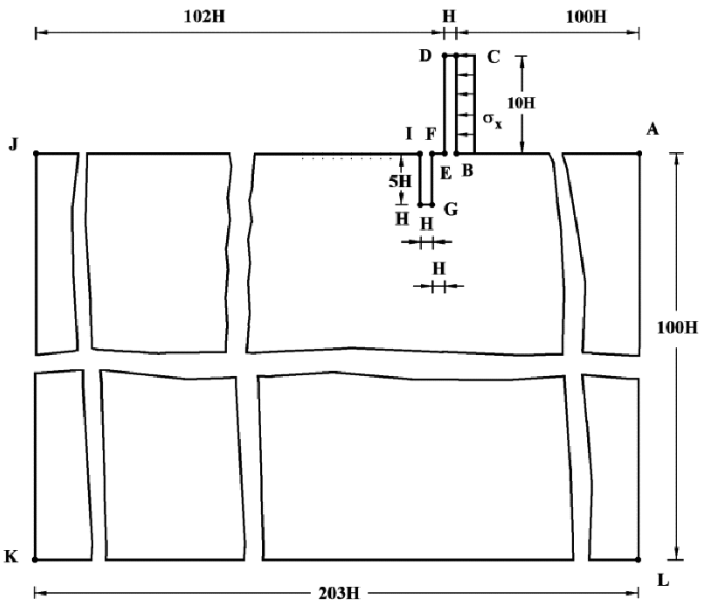

Рис. 3. Постановка задачи о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пяти)

мая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных.

$11 \le n \le 30$ равно P и при $30 \le n \le 40$ изменяется от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (–1 кгс /см^2)). Граничные условия для кон-

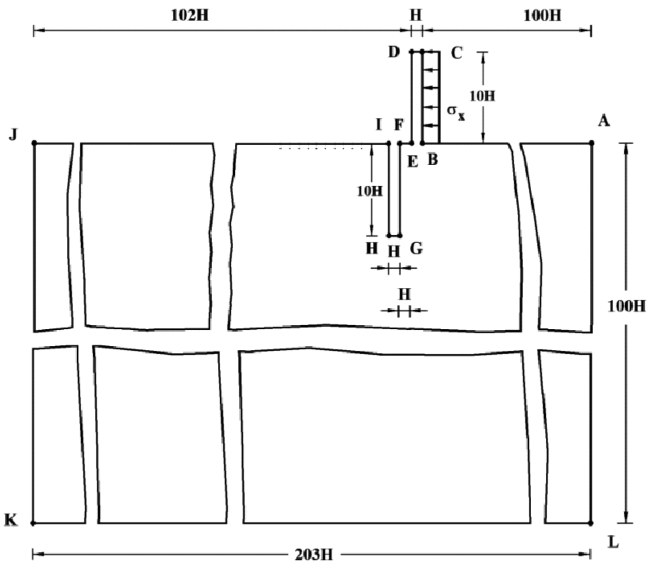

Рис. 4. Постановка задачи о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к десяти)

4. Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны от лавины (рис. 2) на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) (рис. 5). На контуре *CB* приложено нормальное воздействие σ_x, которое при $0 \le n \le 11$ ($n = t / \Delta t$) изменяется от 0 до *P*, а при

тура *JKLA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *JKLA* не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 200$. Контуры *DEFGHIJ* и *BA* свободны от нагрузок, кроме точки *B*, где приложено воздействие. Исследуемая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных.

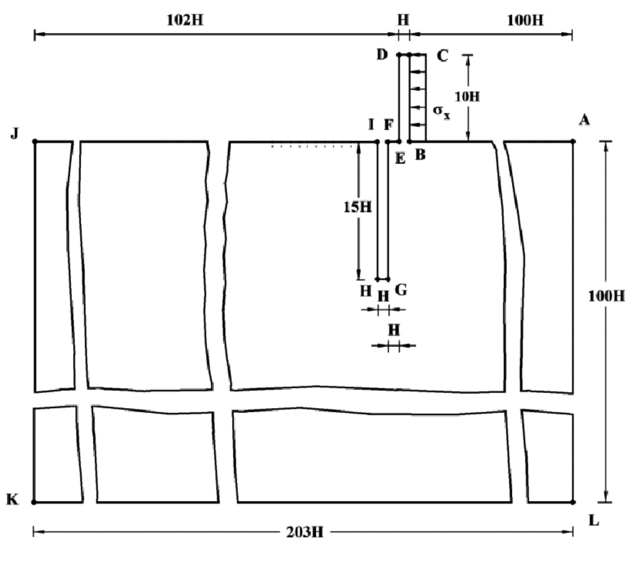

Рис. 5. Постановка задачи о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

Вывод

Приведенные постановки рассматриваемых задач можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности окружающей среды при воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

3. Мусаев В.К. Моделирование упругих напряжений в защитной оболочке реакторного отделения атомной станции с фундаментом и основанием (полуплоскость) при нестационарном ударном воздействии // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12 (часть 5). – С. 587–592.

4. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемой среде на поверхности полуплоскости при взрывном воздействии в объекте хранения опасных веществ // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 1). – С. 84–87.

5. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.

6. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4 (часть 2). – С. 326–330.

7. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.

8. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.

9. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных волн напряжений в бесконечной пластинке при вертикальном сосредоточенном упругом ударном воздействии // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 33–37.

10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в защитном сооружении с основанием (полуплоскость) при воздействии ударной волны от лавины // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 43–46.