

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛОСТЬЮ (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ЧЕТЫРЕМ) ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВЗРЫВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

В работе приводится некоторая информация моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом взрывном воздействии с помощью метода конечных элементов. Рассматривается волновая теория взрывной безопасности. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Применяется техническое средство в виде вертикальных полостей для увеличения безопасности объекта при сосредоточенном взрывном воздействии. Получена явная двухслойная схема. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) в полуплоскости при воздействии в виде дельта функции. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Взрывное воздействие моделируется в виде треугольного импульса. В четырех точках приводится изменение контурного напряжения.

Ключевые слова: численное моделирование, численный метод, алгоритм Мусаева В.К., комплекс программ, метод, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория взрывной безопасности, физическая точность, математическая достоверность, фундаментальное воздействие, метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, полуплоскость, неотражающие граничные условия, исследуемая расчетная область, дельта функция

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSIENT STRESS WAVES IN AN ELASTIC HALF-PLANE WITH THE CAVITY (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO FOUR) IN CONCENTRATED EXPLOSIVE IMPACT

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

The paper provides some information modeling safety elastic half plane in the case of non-stationary wave explosive impact using the finite element method. Considered the wave theory of explosive safety. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions we use the method of finite elements in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem. Applicable technical tool in the form of vertical cavities to increase the security of the object by focusing the explosive effect. The explicit two-layer scheme. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to four) in a half-plane when exposed in the form of Delta functions. Solve the system of equations of 59048 unknown. Explosive impact is modeled as a triangular pulse. Four points is the change in the grid voltages.

Keywords: numerical simulation, numerical method, algorithm Musayev V.K., complex programs, a method of non-stationary elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory's, explosive safety, physical accuracy, mathematical accuracy, and fundamental effects, the method of Galerkin, wave propagation, vertical rectangular cavity, the half-plane, non-reflecting boundary conditions, studied the computational domain, the Delta function

Рассматриваются вопросы численного моделирования взрывного воздействия на упругую полуплоскость с полостью. Поставленная задача решается с помощью численного моделирования уравнений нестационарной математической теории упругости.

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел проч-

ности материала. В этом случае наступает разрушение материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области моделирования нестационарных динамических задач с помощью применяемого метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрены в следующих работах [1–10].

Постановка задачи с начальными и граничными условиями

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие.

Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X},$$

$$(x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ –

плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ –

скорость продольной упругой волны;

$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и векто-

ра внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \vec{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \dot{\vec{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате (5).

В работах [1, 4, 6, 9–10] приведена информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Численное моделирование нестационарных волн напряжений

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:

$$1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа};$$

$$1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3.$$

Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свобод-

ной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) (рис. 1). В точке F перпендикулярно свободной поверхности $ABEFG$ приложено сосредоточенное нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура $GHIA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $GHIA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур $ABCDEFG$ свободен от нагрузок, кроме точки F , где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y . Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^5$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

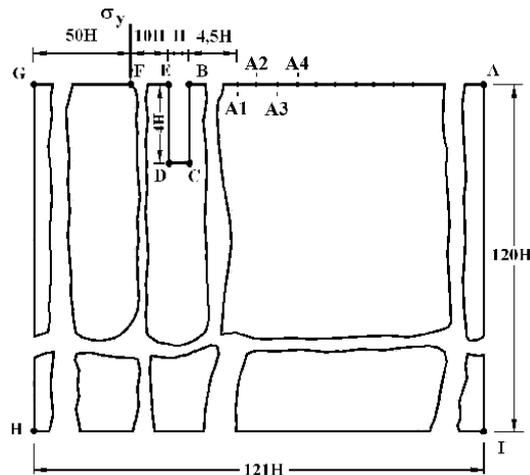


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

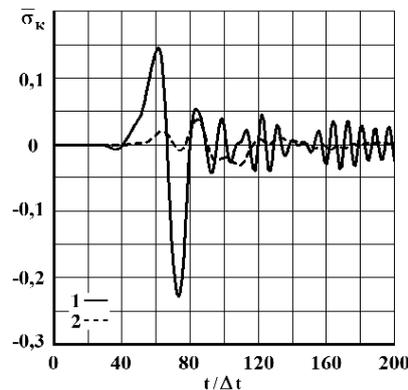


Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке $A1$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

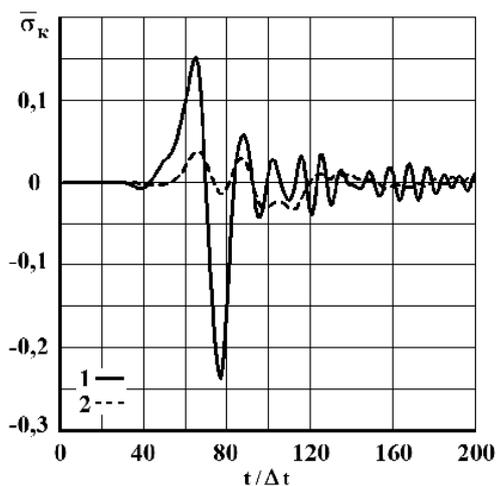


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

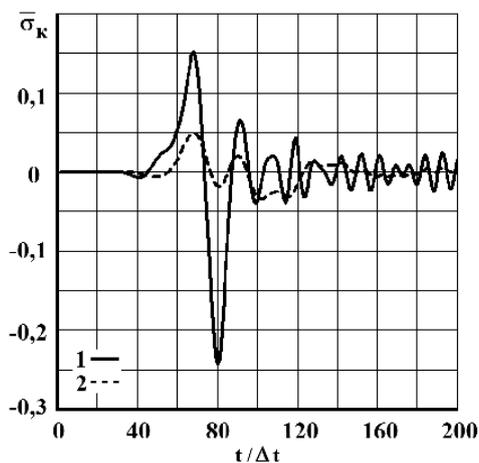


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

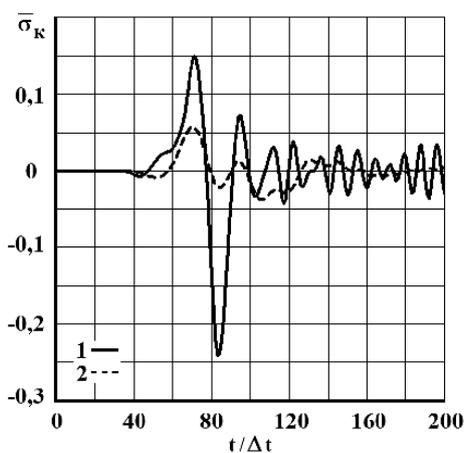


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n получены в точках A1–A4 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

На рис. 2–5 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени n , которые получены в точках A1–A4.

Выводы

Для оценки несущей способности и прогноза безопасности уникальных сооружений при взрывных воздействиях применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при взрывных воздействиях на сооружения. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется кусочно-линейная аппроксимация для уменьшения влияния разрывов на точность результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач при взрывных воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения полученных, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при ре-

шении задач о распространении взрывных волн в деформируемых телах.

Решена задача о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем). Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Рассматриваются точки на свободной поверхности упругой полуплоскости.

Полученные результаты показывают уменьшение напряжений при применении полости с соотношением ширины к высоте один к четырем.

Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности уникальных объектов по несущей способности (прочности) при взрывных воздействиях, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
3. Мусаев В.К. Моделирование безопасности по несущей способности дымовых труб с основанием при взрыве атомной бомбы в Нагасаки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 12. – С. 198–203.
4. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.
5. Мусаев В.К. Определение нестационарного напряженного состояния при вертикальном сосредоточенном взрывном воздействии на набережной речного порта с незаполненным водным объектом // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 88–92.
6. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
7. Мусаев В.К. Решение задачи о сосредоточенном упругом взрывном воздействии в виде дельта функции на набережной речного порта с заполненным водным объектом на 25% // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 4. – С. 52–55.
8. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде функции Хевисайда // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 5 (часть 1). – С. 38–41.
9. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 248–251.
10. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.