

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПОЛОСТЬЮ (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ВОСЬМИ)

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится некоторая информация моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом сейсмическом воздействии с помощью метода конечных элементов. Рассматривается волновая теория сейсмической безопасности. Применяется техническое средство в виде вертикальных полостей для увеличения безопасности объекта. Для решения поставленной задачи применяется волновое уравнение механики деформируемого твердого тела. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Получена явная двухслойная схема. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми) в полуплоскости при воздействии в виде функции Хевисайда. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. В четырех точках приводится изменение контурного напряжения.

Ключевые слова: моделирование, математическое моделирование, численный метод, алгоритм Мусаева В.К., комплекс программ, метод, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория сейсмической безопасности, сейсмика, сейсмическая стойкость, сейсмическое воздействие, фундаментальное воздействие, метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, полуплоскость, неотражающие граничные условия, исследуемая расчетная область, функция Хевисайда

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF IMPACT OF A FLAT LONGITUDINAL NON-STATIONARY SEISMIC WAVES ON AN ELASTIC HALF-PLANE WITH THE CAVITY (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO EIGHT)

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Is some information modeling safety elastic half-plane under non-stationary seismic wave effects using the finite element method. Considered the wave theory of seismic safety. Applicable technical tool in the form of vertical cavities to increase the security of the facility. To solve this problem apply the wave equation mechanics of deformable solids. Basic relations of the finite element method obtained by using the principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The explicit two-layer scheme. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to eight) in the half-plane when exposed in the form of Heaviside functions. Solve the system of equations of 59048 unknown. Four points is the change in the grid voltages.

Keywords: modeling, mathematical modeling, numerical method, algorithm Musayev V.K., complex programs, a method of non-stationary elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory for seismic safety, seismic, seismic resistance, seismic impact, fundamental impact, Galerkin method, wave propagation, vertical rectangular cavity, the half-plane, non-reflecting boundary conditions, studied the computational domain, the function of Heaviside

В работе рассматривается техническое средство в виде вертикальной полости для управления сейсмическим напряженным состоянием исследуемого объекта. Волны, распространяясь, встречаются с полостью. Огибая полость волны, теряют часть энергии направленной на предполагаемый объект и тем самым уменьшают свое влияние рассматриваемый объект.

Постановка задачи при нестационарных сейсмических воздействиях

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что при-

водит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений

в областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухсвязную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \quad (4)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

В работах [1–10] приведена некоторая информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах сложной формы с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

В работах [2–6] приведена информация о физической достоверности и математической точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

О моделировании сейсмической волны в упругой полуплоскости с полостью

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:

$$1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа};$$

$$1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3.$$

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической вол-

ны параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми) (рис. 1). От точки F параллельно свободной поверхности $ABEFG$ приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см^2)). Граничные условия для контура $GHIA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $GHIA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур $ABCDEFG$ свободен от нагрузок, кроме точки F . Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ ($0,255 \cdot 10^{-5} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см}^4$); $C_p = 3587 \text{ м/с}$; $C_s = 2269 \text{ м/с}$. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

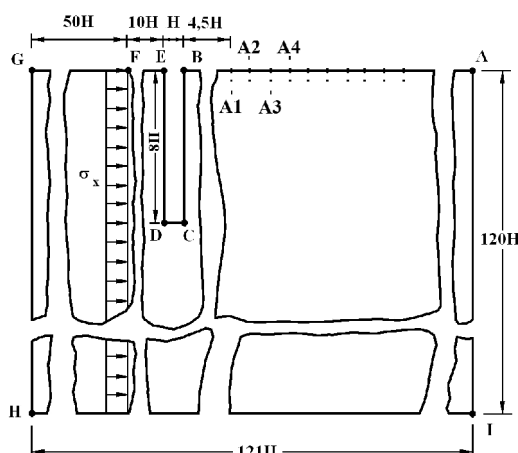


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

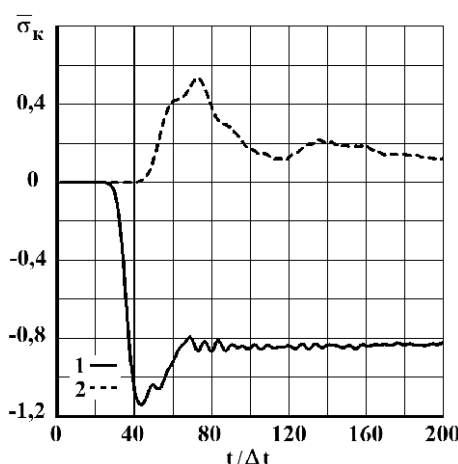


Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке $A1$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

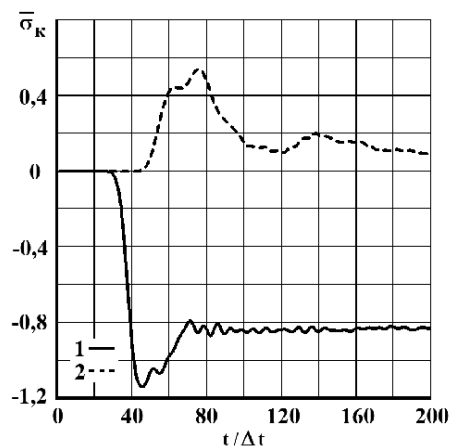


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

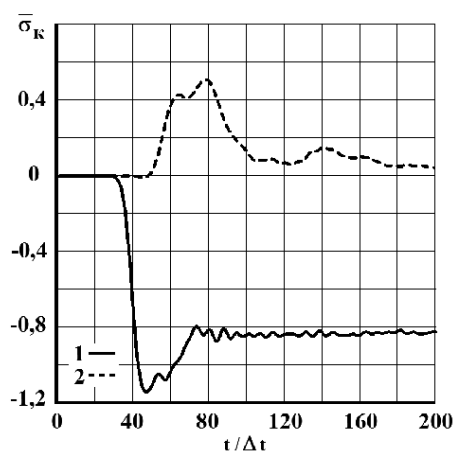


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

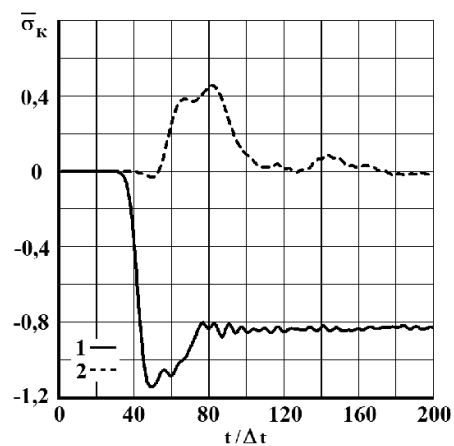


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n получены в точках A1–A4 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

На рис. 2–5 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точках A1–A4 во времени n .

Выводы

Для прогноза безопасности технических объектов при сейсмических воздействиях применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при сейсмических воздействиях на сооружения. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных для решения задач при сейсмических воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

Решена задача о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми). Исследуемая расчетная область имеет 14762

узловых точек и 14512 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Рассматриваются точки на свободной поверхности упругой полуплоскости.

Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности по несущей способности технических объектов экономики при сейсмических воздействиях, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
2. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
3. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4 (часть 2). – С. 326–330.
4. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.
5. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.
6. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 248–251.
7. Мусаев В.К. Определение упругих напряжений в плотине Койна с основанием с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12 (часть 3). – С. 235–240.
8. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных процессов в геообъектах с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 12. – С. 347–352.
9. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в Курпсайской плотине с основанием (полуплоскость) с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 47–50.
10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих динамических напряжений в полуплоскости без полости и с полостью с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–2. – С. 227–231.