УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛОСТЬЮ (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ДВЕНАДЦАТИ) ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ВЗРЫВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассмотрена некоторая информация в области моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом взрывном воздействии с помощью вычислительной механики. Применяется волновая теория взрывной безопасности. Задача решается с учетом переходного процесса механики и физики. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Получена явная двухслойная схема. Применяется техническое средство в виде вертикальных полостей для увеличения безопасности рассматриваемого объекта. Исследуется задача о сосредоточенном вертикальном воздействии в виде дельта функции на свободной поверхности упругой полуплоскости. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати) в полуплоскости при воздействии в виде треугольного импульса. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Взрывное воздействие моделируется в виде треугольного импульса (дельта функция). В четырех точках приводится изменение контурного напряжения.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ Мусаева В.К., метод, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория взрывной безопасности, переходной процесс, физическая точность, математическая достоверность, верификация, фундаментальное воздействие, треугольный импульс, дельта функция, метод динамического равновесия, академическая задача, прикладная задача, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, полуплоскость, неотражающие граничные условия, контурное напряжение, компоненты тензора напряжений, компоненты тензора деформаций

SIMULATION OF TRANSIENT ELASTIC STRESS WAVES IN AN ELASTIC HALF-PLANE WITH THE CAVITY (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO TWELVE) IN CONCENTRATED EXPLOSIVE IMPACT

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Reviewed some information in the field of modelling of safety of an elastic half-plane non-stationary wave with an explosive impact with the help of computational mechanics. Applied wave theory to explosive safety. The problem is solved taking into account the transition process mechanics and physics. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions we use the method of finite elements in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem. The explicit two-layer scheme. Applicable technical tool in the form of vertical cavities to increase the security of the object. Investigates the task of centering the vertical exposure in the form of a Delta function on the free surface of an elastic half-plane. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to twelve) in the half-plane when exposed in the form of a triangular pulse. Solve the system of equations of 59048 unknown. Explosive impact is modeled as a triangular impulse (Delta function). Four points is the change in the grid voltages.

Keywords: computer simulation, numerical method, algorithm, software complex Musayev V.K., a method of non-stationary elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory of explosion safety, transient, physical accuracy, mathematical accuracy, verification, and fundamental effects, a triangular pulse, Delta function, the method of dynamic equilibrium, academic task, applied problem, wave propagation, vertical rectangular cavity, the half-plane, nonreflecting boundary conditions, contour voltage, the components of the stress tensor, components of strain tensor

Рассматриваются вопросы численного моделирования взрывного воздействия на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати). Поставленная задача решается с помощью численного моделирования уравнений динамики сплошных сред.

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см^2 ≈ 0,1 МПа; 1 кгс·с^2/см^4 ≈ 10^9 кг/м^3.

В работах [1–10] приведена информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах сложной формы с помощью применяемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1, 5, 8–10].

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие.

Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial X}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad (x,y)\in\Gamma;$$

$$\sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho\left(C_p^2-2C_s^2\right)\varepsilon_y;$$

$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho\left(C_p^2-2C_s^2\right)\varepsilon_x;\quad \tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy};$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial X};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial Y};$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X},\quad (x,y)\in(\Gamma\cup S),\qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S(S_1\cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}}+\bar{K}\vec{\Phi}=\vec{R};\quad \vec{\Phi}\Big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0;\quad \dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0,\qquad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}=\dot{\vec{\Phi}}_i+\Delta t\bar{H}^{-1}-\left(\bar{K}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i\right);$$

$$\vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}.\qquad (3)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t=0{,}5\frac{\min\Delta l_i}{C_p}\ (i=1,2,3,...),\qquad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

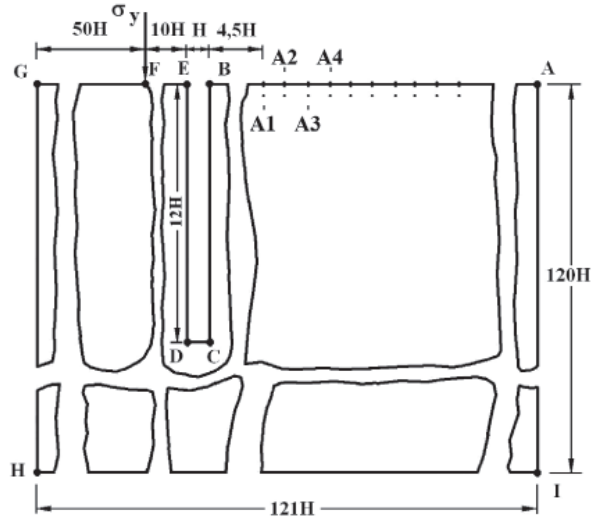

Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

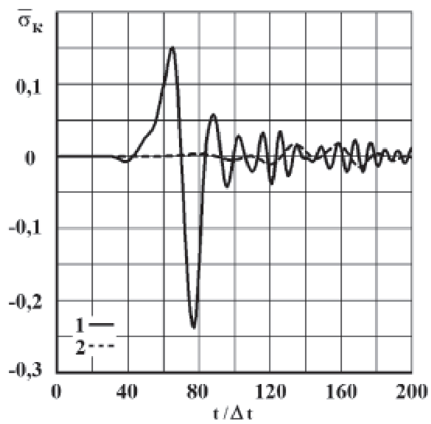

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

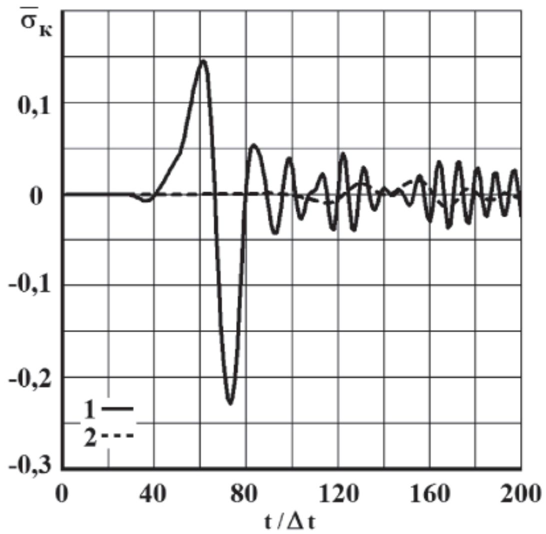

Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A1: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

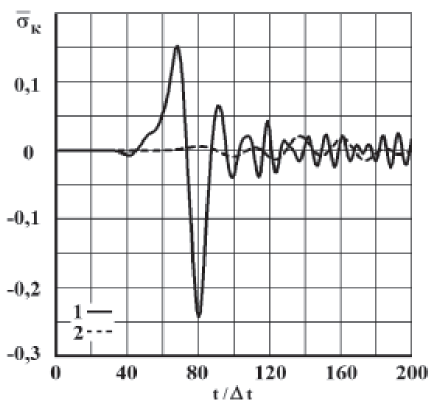

Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

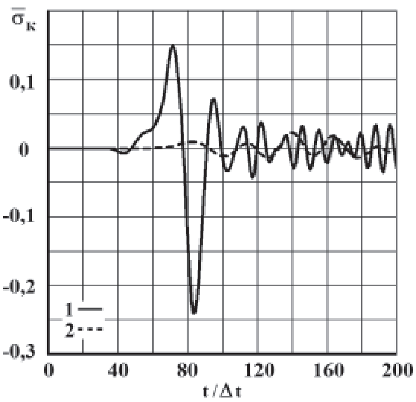

Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати) (рис. 1).

В точке F перпендикулярно свободной поверхности ABEFG приложено сосредоточенное нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $10 \le n \le 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -1$ МПа (-1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контура GHIA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура GHIA не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 200$. Контур ABCDEFG свободен от нагрузок, кроме точки F, где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1{,}393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3{,}15 \cdot 10^4$ МПа ($3{,}15 \cdot 10^5$ кгс/см^2); $\nu = 0{,}2$; $\rho = 0{,}255 \cdot 10^4$ кг/м^3 ($0{,}255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с^2/см^4); $C_p = 3587$ м/с; $C_S = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ $\left(\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|\right)$ во времени n получены в точках A1–A4 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

На рис. 2–5 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени n в точках A1–A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати).

Выводы

1. Для прогноза безопасности объекта, находящегося в твердой деформируемой среде, при волновых воздействиях применяется численное моделирование.

2. Разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при волновых воздействиях.

3. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

4. Рассмотрена задача о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати).

5. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати), с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

3. Мусаев В.К. Моделирование безопасности по несущей способности дымовых труб с основанием при взрыве атомной бомбы в Нагасаки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 12. – С. 198–203.

4. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемой среде на поверхности полуплоскости при взрывном воздействии в объекте хранения опасных веществ // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1–1. – С. 84–87.

5. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1–7. – С. 1184–1187.

6. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2–1. – С. 25–29.

7. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2–2. – С. 220–223.

8. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.

9. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4–2. – С. 326–330.

10. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.