УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛОСТЬЮ (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ЧЕТЫРЕМ)

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится некоторая информация моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом сейсмическом воздействии с помощью метода конечных элементов. Рассматривается волновая теория сейсмической безопасности. Применяются технические средства в виде вертикальных полостей для увеличения безопасности объекта. Для решения поставленных задач применяются волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) в полуплоскости при воздействии в виде функции Хевисайда. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Ключевые слова: моделирование, математическое моделирование, численный метод Мусаева В.К., алгоритм, комплекс программ, метод, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория сейсмической безопасности, переходной процесс, дифракция, интерференция, сейсмика, сейсмическая стойкость, сейсмическое воздействие, фундаментальное воздействие, конечноэлементный метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, исследуемая расчетная область, контурное напряжение, компоненты тензора напряжений, компоненты тензора деформаций, функция Хевисайда

THE APPLICATION OF WAVE THEORY FOR SEISMIC SAFETY FOR THE SIMULATION OF DYNAMIC STRESSES IN ELASTIC HALF-PLANE WITH THE CAVITY (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO FOUR)

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Is some information modeling safety elastic half-plane under non-stationary seismic wave effects using the finite element method. Considered the wave theory of seismic safety. Apply technical means in the form of vertical cavities to increase the security of the facility. For the decision of tasks used the wave equation mechanics of deformable solids. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for the solution of linear dynamic problems of the elasticity theory. Basic relations of the finite element method obtained by using the principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The problem with the initial conditions using a finite element Galerkin variant of the method is given to the explicit two-layer scheme. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to four) in a half-plane when exposed in the form of Heaviside functions. Solve the system of equations of 59048 unknown.

Keywords: modeling, mathematical modeling, numerical method Musayev V.K., algorithm, program system, method, unsteady elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory for seismic safety, transient, diffraction, interference, seismic, seismic resistance, seismic impact, fundamental impact, finite element method Galerkin, wave propagation, vertical rectangular cavity, studied the computational domain, contour voltage, the components of the stress tensor, components of strain tensor, function of Heaviside

В работе рассматривается техническое средство в виде вертикальной полости для управления сейсмическим напряженным состоянием исследуемого объекта. Волны, распространяясь, встречаются с полостью. Огибая полость волны, теряют часть энергии направленной на предполагаемое сооружение и тем самым уменьшают свое влияние на предполагаемое сооружение.

Постановка задачи при нестационарных сейсмических воздействиях

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области моделирования нестационарных динамических задач с помощью применяемого метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрены в следующих работах [1–10].

В работах [1, 4, 6–8] приведена информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени $t=0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие. Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial X}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad (x,y)\in\Gamma;$$

$$\sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho\left(C_p^2-2C_s^2\right)\varepsilon_y;$$

$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho\left(C_p^2-2C_s^2\right)\varepsilon_x;\ \tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy};$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial X};\ \ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial Y};$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X},\quad (x,y)\in(\Gamma\cup S),\qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S(S_1\cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}}+\bar{K}\vec{\Phi}=\vec{R};\quad \vec{\Phi}\big|_{t=0}=\vec{\Phi}_0;\quad \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0}=\dot{\vec{\Phi}}_0,\quad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}}+\bar{K}\vec{\Phi}=\vec{R};\ \ \frac{d}{dt}\vec{\Phi}=\dot{\vec{\Phi}}.\qquad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}=\dot{\vec{\Phi}}_i+\Delta t\bar{H}^{-1}\left(-\bar{K}\vec{\Phi}_i+\vec{R}_i\right);$$

$$\vec{\Phi}_{i+1}=\vec{\Phi}_i+\Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}.\qquad (4)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0{,}5\frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, ...), \qquad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

О моделировании сейсмической волны в упругой полуплоскости с полостью

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с).

Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см^2 ≈ 0,1 МПа; 1 кгс·с^2/см^4 ≈ 10^9 кг/м^3.

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны в виде функции Хевисайда параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) (рис. 1). От точки F параллельно свободной поверхности ABEFG приложено нормальное напряжение σ_x, которое при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \ge 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0{,}1$ МПа (1 кгс/см^2)).

Граничные условия для контура GHIA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура GHIA не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 200$. Контур ABCDEFG свободен от нагрузок, кроме точки F. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1{,}393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3{,}15 \cdot 10^4$ МПа ($3{,}15 \cdot 10^5$ кгс/см^2); $\nu = 0{,}2$; $\rho = 0{,}255 \cdot 10^4$ кг/м^3 ($0{,}255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с^2/см^4); $C_p = 3587$ м/с; $C_S = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ $\left(\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|\right)$ во времени n получены в точках A1–A4 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

На рис. 2–5 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точках A1–A4 (рис. 1) во времени n.

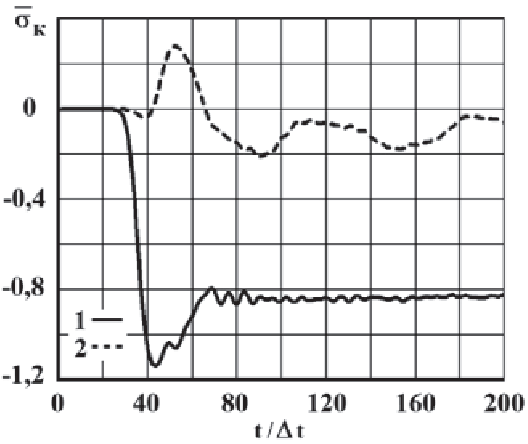

Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точке A1: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

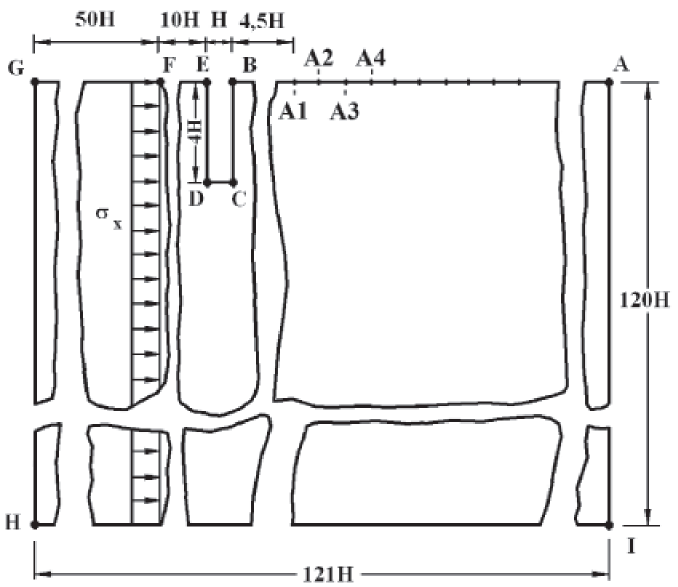

Рис. 1. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

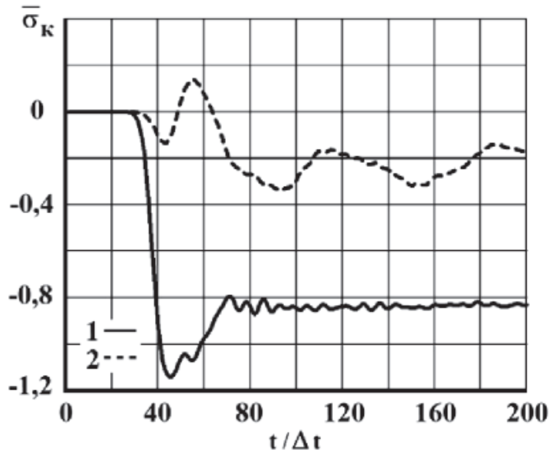

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

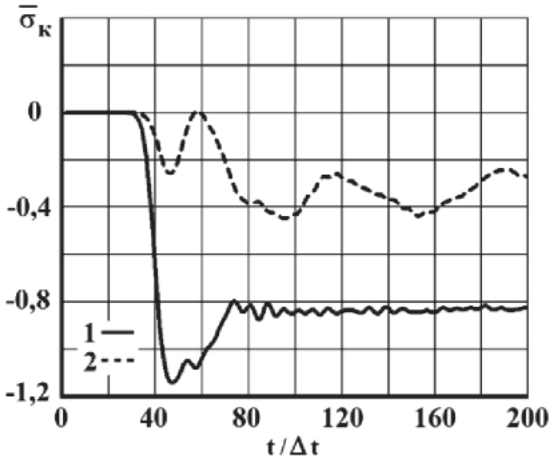

Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

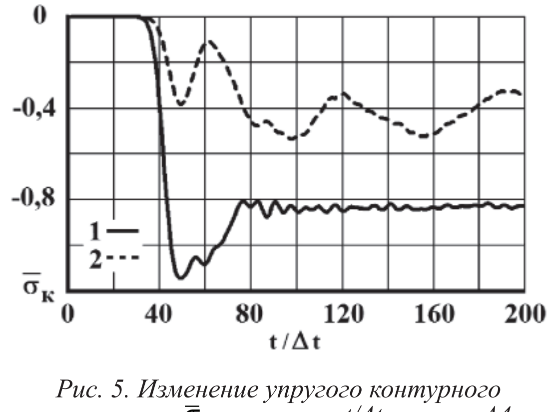

Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

Выводы

1. Для прогноза безопасности технических объектов при сейсмических воздействиях применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при сейсмических воздействиях на сооружения. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность.

2. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

3. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Кусочно-линейная аппроксимация начального участка при воздействии типа функции Хевисайда уменьшает осцилляции результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

4. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных для решения задач при сейсмических воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

5. Решена задача о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем). Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14516 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

6. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности технических объектов экономики при сейсмических воздействиях, с помощью

численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

3. Мусаев В.К. Определение упругих напряжений в плотине Койна с основанием с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12–3. – С. 235–240.

4. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1–7. – С. 1184–1187.

5. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–29.

6. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.

7. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4–2. – С. 326–330.

8. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.

9. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде функции Хевисайда // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 5–1. – С. 38–41.

10. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных упругих волн напряжений в некоторых задачах методического характера // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11–2. – С. 227–230.