

УДК 539.3

ДОСТОВЕРНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА, АЛГОРИТМА И КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ МУСАЕВА В.К. ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН (ВОСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЛИНЕЙНАЯ, НИСХОДЯЩАЯ ЧАСТЬ – ЧЕТВЕРТЬ КРУГА) В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Дикова Е.В.

Московский политехнический университет, Москва, e-mail: nika_lena@mail.ru

Приводится некоторая информация моделирования нестационарных упругих волн в полуплоскости при импульсном воздействии (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга). Для решения поставленной задачи применяются волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны численный метод, алгоритм и комплекс программ Мусаева В.К. Для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных динамических воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Применяется квазирегулярный подход при аппроксимации исследуемой области. Приводится нормальное напряжение в характерной точке упругой полуплоскости.

Ключевые слова: достоверность, верификация, численный метод Мусаева В.К., алгоритм Мусаева В.К., комплекс программ Мусаева В.К., нестационарные упругие волны, волновые уравнения, динамика сплошных сред, распространение волн, волновая теория, взаимодействие с границами, полуплоскость, неотражающие граничные условия, алгоритмический язык Фортран-90, квазирегулярный подход, аппроксимация исследуемой области, исследуемая область, условия на фронте плоской волны, импульсное воздействие, напряжения на фронте плоской волны

THE ACCURACY OF THE NUMERICAL METHOD, ALGORITHM AND PROGRAM COMPLEX MUSAYEV V.K. IN THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF PLANE LONGITUDINAL ELASTIC WAVES (RISING – LINEAR DESCENDING PART, A QUARTER CIRCLE) IN A HALF-PLANE

Dikova E.V.

Moscow Polytechnic University, Moscow, e-mail: nika_lena@mail.ru

Is some information modeling of nonstationary elastic waves in a half-plane under the pulsed action (rising – linear descending part, a quarter circle). To solve this problem apply the wave equation mechanics of deformable solids. On the basis of the finite element method in displacements developed numerical method, algorithm and program complex Musayev V.K. for solving linear flat two-dimensional problems, which allow solving tasks with non-stationary dynamic effects in a complex system. In the development of complex programs used algorithmic language Fortran-90. Quasiregularity used approach in approximating the study area. Is normal stress in the elastic half-plane.

Keywords: authenticity, verification, numerical method Musayev V.K., algorithm Musayev V.K., complex programs Musayev V.K., unsteady elastic waves, wave equations, dynamics of continuous media, wave propagation, wave theory, the interaction with the boundaries, the half-plane, nonreflecting boundary conditions, algorithmic language Fortran-90, quasiregularity approach, approximation of the study area the investigated area, conditions at the front of a plane wave, pulse impact, the tension at the front of a plane wave

Постановка задачи при нестационарных волновых воздействиях

В настоящее время оценка достоверности моделирования быстропротекающих процессов в областях различной формы является приоритетной задачей фундаментальной и прикладной науки. Некоторая информация о постановке и численной реализации нестационарных волновых задач механики деформируемого твердого тела приведена в следующих работах [1–10]. Для решения задачи о моделировании упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t=0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \\ \tau_{xy} &= \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \\ (x, y) &\in (\Gamma \cup S),\end{aligned}\quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\begin{aligned}\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} &= \bar{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \\ \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} &= \dot{\vec{\Phi}}_0,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\bar{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнение (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \bar{R}_i), \\ \dot{\vec{\Phi}}_{i+1} &= \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\vec{\Phi}}_{i+1}.\end{aligned}\quad (3)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплекс программ написан на алгоритмическом языке Фортран-90.

Моделирование распространения плоских продольных упругих волн в полуплоскости

В работах [1, 3–10] приведена информация о физической достоверности и математической точности применяемого численного метода, алгоритма и комплекса программ при решении задач моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах различной формы.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$. Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде импульсного воздействия (восходящая часть – линейная, нисходящая – четверть круга) (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1).

На границе полуплоскости AB приложено нормальное напряжение σ_y , которое при $1 \leq n \leq 11$ ($n = t / \Delta t$) изменяется от 0 до P и при $11 \leq n \leq 21$ изменяется от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$ (-1 кгс/см^2)). Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 80$. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 0,125 \cdot 10^{-4} \text{ с}$; $E = 22,366 \cdot 10^1 \text{ МПа}$ ($22,366 \cdot 10^2 \text{ кгс/см}^2$); $\nu = 0,22$; $\rho = 1,469 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ($1,469 \cdot 10^{-6} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см}^4$); $C_p = 400 \text{ м/с}$; $C_s = 250 \text{ м/с}$. Исследуемая расчетная область имеет 20862 узловых

точек. Решается система уравнений из 83448 неизвестных.

На рис. 3 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точке B1.

смагиваемые волны можно представить как плоские. Тогда все частицы движутся параллельно направлению распространения волны. Такие волны принято считать плоскими.

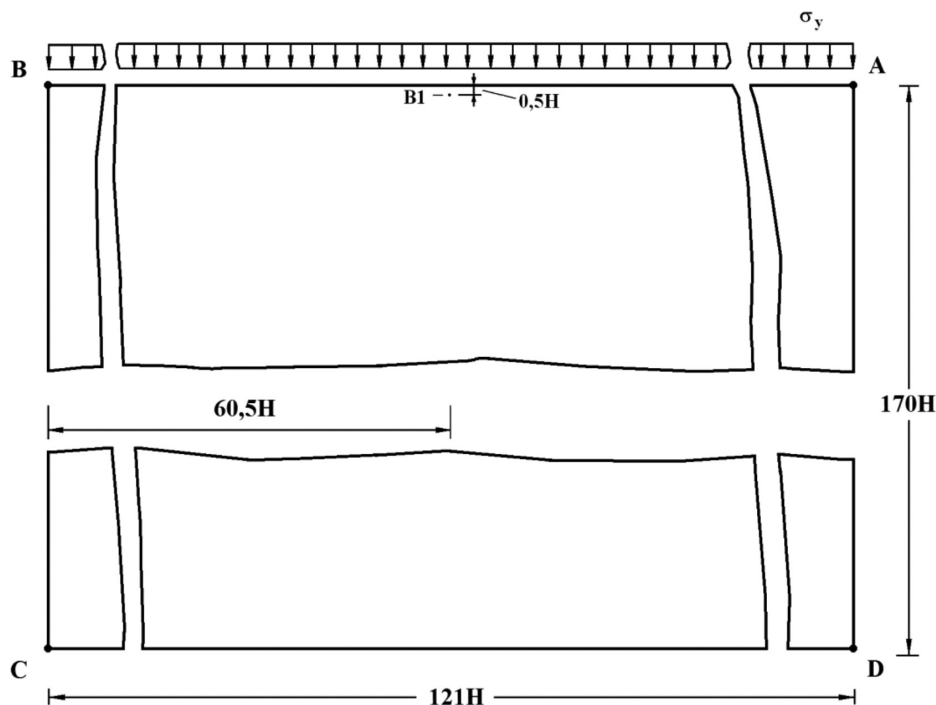


Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных волн в упругой полуплоскости

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны. Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. Тогда из этих точек во все стороны начинают излучаться волны. На некотором расстоянии от центра возмущения рас-

На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния $\sigma_x = -|\sigma_0|$ и $\sigma_y = -\nu|\sigma_0|$.

Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 2).

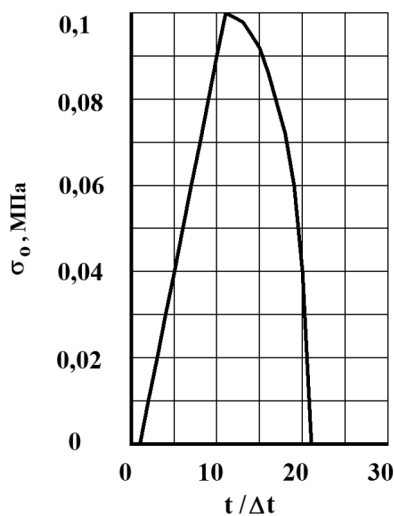


Рис. 2. Импульсное воздействие (восходящая часть – линейная, нисходящая – четверть круга)

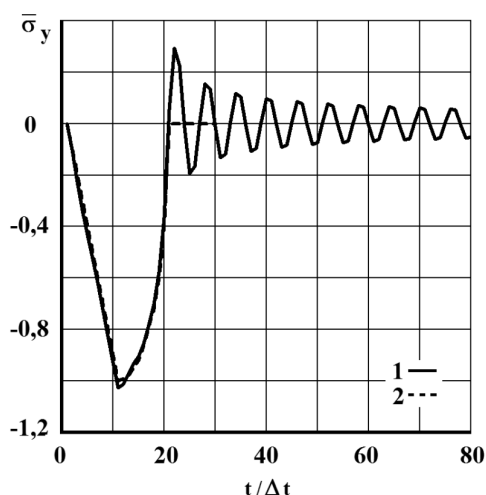


Рис. 3. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке B1:
1 — численное решение;
2 — аналитическое решение

Для упругих нормальных напряжений σ_x и σ_y имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения. Таким образом, можно сделать вывод, что на точность численного решения оказывает влияние аппроксимация воздействия.

Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть — линейная, нисходящая — четверть круга) в упругой полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения задач о распространении упругих волн в деформируемых телах.

Выводы

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при воздействии нестационарных волн напряжений на различные объекты.

Решена задача о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия в упругой полуплоскости. Исследуемая расчетная область имеет 20862 узловых точек. Решается система уравнений из 83448 неизвестных.

Для решения поставленной задачи используется импульсное воздействие (восходящая часть — линейная, нисходящая часть — линейная).

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о физической достоверности и математической точности результатов численного решения полученных, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задач о распространении нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах.

Автор выражает благодарность Мусаеву В.К. за внимание к работе.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2014. — № 11. — С. 10–14.
2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. — 2014. — № 12 (1). — С. 28–32.
3. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. — 2015. — № 1 (часть 7). — С. 1184–1187.
4. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. — 2015. — № 2. — С. 93–97.
5. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. — 2015. — № 4 (часть 2). — С. 326–330.
6. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2015. — № 11 (часть 2). — С. 248–251.
7. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть — четверть круга, средняя — горизонтальная, нисходящая — линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. — 2015. — № 11 (часть 2). — С. 222–226.
8. Мусаев В.К. Оценка физической достоверности и математической точности численного моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений в виде импульсного воздействия (функция Хевисайда) в полуплоскости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2016. — № 11–1. — С. 49–52.
9. Мусаев В.К. Оценка математической точности и физической достоверности численного моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений (дельта функция) в полуплоскости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2016. — № 11–2. — С. 232–235.
10. Мусаев В.К. Оценка точности компьютерного моделирования плоских нестационарных волн напряжений (прямоугольный импульс) в упругой полуплоскости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2016. — № 11–2. — С. 236–239.