УДК 371.278/.263

КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД К СОДЕРЖАНИЮ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Келдибекова А.О.

Ошский государственный университет, Ош, e-mail: aidaoskk@gmail.com

Статья фокусируется на обосновании потенциальных возможностей олимпиадных задач по математике при внедрении компетентностного подхода к обучению. Являясь членом жюри школьных городских и областных олимпиад, автор делится методическим опытом проверки олимпиадных работ, уделяя внимание способам решений и видам ошибок, которые необходимо учесть при объективном оценивании олимпиадных работ учащихся, особенностям определения баллов за каждое задание. Результаты методического анализа и способы решения задач городской математической олимпиады 2017 г., критерии оценки, методика проверки олимпиадных работ учащихся будут полезны учителям при подготовке школьников к участию в олимпиадах. За время исследования были сделаны следующие выводы: содержание олимпиадных задач включает в себя: компетентность, фиксируемые умения, постановку задачи на саморазвитие, т.е. отвечает составу и логической структуре математической компетентности, следовательно, компетентностный подход реализуется при подготовке школьников к математическим олимпиадам. Считаем необходимым предварительное проведение методического инструктажа учителей математики по проверке работ, способам решений и видам ошибок, которые нужно будет учесть членам жюри.

Ключевые слова: городская олимпиада, школьник, олимпиадные задания, критерии, оценивание

COMPETENCY-BASED APPROACH IN CONTENT OF SCHOOL COMPETITION TASKS ON MATHEMATICS

Keldibekova A.O.

Osh State University, Osh, e-mail: aidaoskk@gmail.com

The article focuses on the potential identification of competition tasks using a competency-based approach to teaching. The author shares the methodical experience of working in the jury of city and regional schoolchildren competitions, and determines the criteria for an objective evaluation of schoolchildren competition works, which are used by the competition commissions grading each task. The method of competition works` grading, the analysis of the tasks of the city mathematical schoolchildren competition in Kyrgyzstan in 2017 will be useful for teachers when preparing schoolchildren for participation in competitions. While making research the following conclusions were drawn: the content of the competition tasks corresponds to the composition and logical structure of mathematical competence, the competition problem acts as a tool that determines the level of subject and key competencies` formation. The members of the jury need methodical instructions in determining the criteria for evaluating schoolchildren competition activity and for methods of solutions and types of mistakes.

Keywords: city competition, schoolchild, competition tasks, criteria, evaluation

Внедрение компетентностного подхода к обучению к 2020 г. входит в одну из задач системы образования Кыргызской Республики [1]. Основным непосредственным результатом образовательной деятельности с позиции компетентностного подхода становится формирование ключевых компетентностей [2]. Направленность компетентностного подхода к обучению: на «формирование умений учиться; ориентироваться в ситуации неопределенности и принимать решения на основе анализа информации; коммуникативных способностей; аналитических навыков и критического мышления» [3, с. 19] – отвечает содержанию подготовки школьников к математическим олимпиадам. И олимпиадная задача выступает при этом как инструмент определения уровня сформированности умений учиться, взаимодействовать в группе, работать с разными источниками информации [4]. А участие в математических олимпиадах формирует навыки научно-исследовательской деятельности учащихся, одновременно способствуя саморазвитию и самореализации их личности. Таким образом, очевидны возможности олимпиады в реализации компетентностного подхода в обучении олимпиадной математики. При обучении математике школьник знакомится со следующими типами задач:

– учебная – задача с известным алгоритмом решения, тренировочного характера;

– олимпиадная – задача с неизвестным способом решения, нестандартная;

– исследовательская – комплексная задача с неопределенным условием, проблемно-поисковая.

Учителю важно соотнести содержание задач олимпиады с содержанием школьного образования, поэтому к содержанию олимпиадных задач предъявляются особые требования.

Определяя понятие олимпиадных задач, одни авторы характеризуют их, как «не просто упражнения на проверку знаний и применение стандартных школьных приемов, а чаще всего теоремы, которые нужно доказать, задачи на отыскание... требующие некоторого исследования» [5, с. 3]. Другие, авторы задач Всероссийских олимпиад школьников акцентируют важность и необходимость включения в олимпиады заданий нового типа: «математические способности – это способности к построению новых для ученика логических конструкций, поэтому наиболее эффективно свою основную задачу открытия молодых талантов решают олимпиады, составленные из новых задач» [6, с. 14].

Анализируя тематику и содержание олимпиадных задач в [7], мы определили, что в задания разных уровней олимпиады включают задачи:

– составленные на основе программ по математике для общеобразовательных учебных учреждений, в качестве сложных допускаются задачи, тематика которых входит в программы кружков и школы олимпийского резерва;

– разного уровня сложности из разделов школьной математики, изученных к моменту проведения олимпиады: арифметика, алгебра, тригонометрия, комбинаторика, теория чисел, геометрия, математический анализ;

– задачи с нарастающим уровнем сложности;

– задания нового типа особенно важны.

Проецируя собственный опыт работы в жюри городских и областных олимпиад с 1994 г., считаем, что оценивание олимпиадных работ учащихся должно основываться на критериях оценки олимпиадной деятельности учащихся, а именно:

1) оценка собственных достижений – использование знаний внешкольной программы данного возраста;

2) эрудиция ученика в области олимпиадной математики – использование известных научных фактов;

3) защита результатов олимпиадной работы – четкая логика изложения, аргументированное обоснование решений, оригинальность рассуждений, умение защитить свою точку зрения при проведении апелляции.

Задания III этапа олимпиады школьников 2016–2017 учебного года в Кыргызстане состояли из трех задач, на решение которых было отведено 4 часа. Результаты олимпиады, требования к олимпиадным работам, оформление документации освещены в [8, с. 166–173]. Задача считалась полностью решённой с начислением максимально возможного количества баллов, только если в тексте решения были приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду. Если верный ответ не подкреплялся решением, со всеми обоснованными пояснениями, то задача считалась нерешенной.

Для уменьшения субъективизма при оценке решений были приняты градации:

1. Задание выполнено правильно и полностью, оформлено без замечаний и в надлежащем виде – 7 баллов.

2. Задание выполнено правильно, но упущены несущественные детали или оформлено с погрешностями – 6.

3. Задание выполнено правильно, но ответ не получен: осталось 1–2 шага до ответа – 5.

4. Задание выполнено правильно более, чем на половину – 4 б.

5. Выполнены предварительные шаги, к примеру при решении текстовой задачи правильно составлена система и сделана попытка решения системы или, при решении геометрической зада-

чи, в чертеже выполнены дополнительные построения для решения задачи, сделано несколько шагов и т.д. – 3 б.

6. Записаны формулы, касающиеся задания, но решение задания не начато – 2 б.

7. На усмотрение проверяющего при оценивании задания предусматривается добавление 25 %, 50 %, 75 % от балла.

Предлагаем учителям методические рекомендации для проверки олимпиадных работ:

а) предварительно просмотрите свою задачу во всех работах. Определите различные способы решения этой задачи, типичные ошибки;

б) если записи по решению данной задачи отсутствуют, то в таблице ставится прочерк; если записи есть, но вы считаете, что в них нет элементов правильного решения, то поставьте 0 баллов;

в) если решение данной задачи заслуживает 0 баллов, то можно эту оценку ставить сразу. За хорошие решения при первом просмотре оценку не ставьте, пока у вас не сформируется мнение об общем уровне решений данной задачи.

Жюри олимпиады необходимо обратить внимание на работы:

– в которых видно, что участник не знал данного материала, но в процессе решения олимпиадной задачи открыл его для себя, при этом он может выражать свои мысли в необычной форме;

– в которых участник искал оптимальное, в каком-либо смысле, решение. В неясных случаях обращайтесь к председателю жюри;

– проверьте снова все работы, где вы не поставили ноль или прочерк, и ставьте соответствующее количество баллов;

– для облегчения проведения апелляции запишите красными чернилами количество баллов и все замечания по письменному решению задачи.

Опыт членства в жюри олимпиад показывает нам, что необходимо осуществлять подготовку молодых кадров в состав жюри, для этого считаем целесообразным проводить предварительный инструктаж с членами жюри олимпиады, знакомить их с методическими рекомендациями по проверке, критериям оценки, способам решения и видам ошибок, допускаемых учениками при участии в олимпиадах.

Приведем решения заданий, предложенных участникам I, II туров городской олимпиады 2016–2017 учебного года для X и XI классов для базового и профильного уровней.

Задания олимпиады для X класса базового уровня

Задача 1. Найдите все тройки действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3y^3z^3 = 1, \\ xy^5z^3 = 2, \\ xy^3z^5 = 3. \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим любое из трех уравнений. Все три переменные в нем стоят в нечетных степенях. Это значит, что, либо все три числа x, y, z положительные, либо среди них два отрицательных и одно положительное. Причем при наличии отрицательных, если у них обоих сменить знак, мы получим положительное решение.

Отсюда следует, что достаточно найти все положительные решения. Меняя их знаки, получим и все остальные. Итак, считаем, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Делим второе уравнение на первое, получим: $y^2 = 2x^2$, т.е. $y = \sqrt{2}x$. Делим третье уравнение на первое, получим: $z^2 = 3x^2$, т.е. $z = \sqrt{3}x$. Подставляя все в первое уравнение, получим

$$6\sqrt{6}x^9 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{6}},\quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}},\quad z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}.$$

Итак, единственное положительное решение найдено. С учетом замечания про знаки получим еще три решения, т.е. всего четыре решения.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)$;

$$\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right);$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right).$$

Задача 2. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причем скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека всегда больше скорости эскалатора). Условие и решение взято из задачной базы Самарского государственного университета [9].

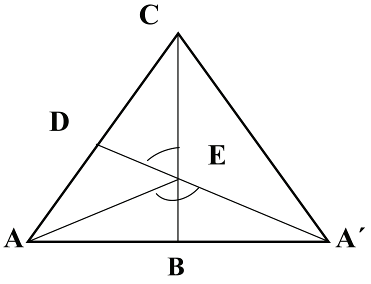
Решение: Обозначим скорость эскалатора через v, скорости человека, поднимающегося и опускающегося по эскалатору, через v_1, v_2 соответственно, тогда $v < v_1 < v_2$. Длину эскалатора обозначим через ℓ, тогда время движения по поднимающемуся эскалатору: $t_1 = \ell/(v_1 + v) - \ell/(v_2 - v)$. А по спускающемуся эскалатору $t_2 = \ell/(v_2 + v) - \ell/(v_1 - v)$. Вычислим разность $t_1 - t_2 = \ell/(v_1 + v) + \ell/(v_2 - v) - \ell/(v_2 + v) - \ell/(v_1 - v) = 2\ell v(\ell/(v_2^2 - v^2) - \ell/v_1^2 - v^2))$.

По условию знаменатели обеих дробей положительны, причем первый больше второго, поэтому все выражение отрицательно. Вывод: $t_1 < t_2$.

Ответ: Быстрее спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору.

Задача 3 взята из издания [10]. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90°$. На сторонах AC, BC выбраны точки E и D соответственно такие, что AE = EC, $\angle ADB = \angle EDC$ (рисунок). Найти отношение CD:BD.

Решение: Построим Δ A´BC, симметричный данному относительно стороны BC. Точки A´, D, E лежат на одной прямой, т.к. $\angle A'DB = \angle EDC$. Следовательно, D – точка пересечения медиан A´ E и CB треугольника Δ AA´C, и делит их в отношении 2:1, считая от вершины.



К задаче 3

Ответ: 2:1

Задания олимпиады для X класса углубленного уровня

Задача 1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C, D. Докажите, что все эти точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, заданной уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

Решение: Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25. \end{cases} \qquad (1)$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и подставляя y^2 из первого, получим

$$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}. \qquad (2)$$

Поскольку уравнение (2) получено как следствие системы (1), любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности, координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D.

Ответ: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Задача 2. Доказать, что любое число 2^n, где $n = 3, 4, 5, \ldots$ можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y – нечетные числа.

Решение: Применим при решении метод математической индукции. Для $n = 3$ утверждение верно; пусть оно верно и для $n = k$: $2^k = 7x^2 + y^2$, где x и y нечетны. Рассмотрим две пары чисел:

$$\left\{\frac{1}{2}(x-y); \frac{1}{2}(7x+y)\right\}$$

и

$$\left\{\frac{1}{2}(x+y); \frac{1}{2}(7x-y)\right\}.$$

Для каждой пары усемеренный квадрат первого числа плюс квадрат второго дает 2^{k+1}. Остается заметить, что в каждой паре стоят числа одной четности, а в разных – разной четности, поэтому числа одной из пар – нечетны. Условие и решение приводилось в [11].

Задача 3. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство: $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

Решение: Используя неравенство треугольника $a + b > c$ и то, что $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, получим цепочку неравенств:

$$a^3 + b^3 + 3abc = (a - b)(a^2 - ab + b^2) + \\ + 3abc > a(a^2 - ab + b^2) + 3abc = \\ = c(a^2 - ab + b^2) > c \cdot c^2 = c^3.$$

Задания олимпиады для XI класса базового уровня

Задача 1. Решить уравнение $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$ в целых положительных числах.

Решение задачи показано в [12]: любое число единственным образом представляется в виде суммы двух чисел, одно из которых – целое, а другое – неотрицательное и меньше единицы. Это сумма его целой и дробной части. Для $\frac{10}{7}$ таким представлением будет $\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$. Поэтому $x = 1$, $y+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$. Аналогично разложим $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$ в сумму целой и дробной части. Получим $y = 2$, $z = 3$.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Задача 2. Айбеку на 23 февраля подарили 777 конфет. Айбек хочет съесть все конфеты за n дней, причем так, чтобы за каждый из этих дней, кроме первого, но включая последний, съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно? Условие задачи аналогично условию задачи в [13].

Решение: Если в первый день Айбек съест a конфет, то за n дней он съест $a + (a + 1) +…+ (a + n + 1) = \frac{n(2a-1+n)}{2}$ конфет.

Значит, $\frac{n(2a-1+n)}{2} = 777$. Следовательно n делит $2 \cdot 777 = 1554$. Так как $1554 = n(2a - 1 + n) > n^2$, то $n < 40$. Но максимальное число n меньшее 40 и делящее $1554 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$ равняется 37. Случай $n = 37$ действительно возможен при $a = 3$.

Ответ: $n = 37$.

Задания олимпиады для XI класса углубленного уровня

Задание 1. Пусть a, b, c такие целые неотрицательные числа, что

$28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$. Данная задача приводилась в [13].

Решение: пусть $a + b + c \leq 11$. Тогда $28a + 30b + 31c \leq 31 \ (a + b + c) \leq 11 \cdot 31 = 341 < 365$, противоречие.

Пусть $a + b + c \geq 14$, тогда $28a + 30b + 31c \geq 28(a + b + c) \geq 28 \cdot 14 = 392 > 365$, и этого быть не может. Осталось доказать, что: $a + b + c$ не может равняться 13.

Пусть $a + b + c = 13$. Вариант $a = 13$, $b = c = 0$ не удовлетворяет условию: $28 \cdot 13 + 30 \cdot 0 + 31 \cdot 0 = 364 \neq 365$. Остается вариант $a + b + c = 13$, $a < 13$. В этом случае: $b + c = 13 - a > 0$ и $28a + 30b + 31c = 28(a + b + c) + 2b + 3c \geq 28 \cdot 13 + 2(b + c)$.

Первое слагаемое равно 364, второе – не меньше 2. Значит, сумма не меньше 366 и не может равняться 365. Следовательно, $a + b + c = 12$.

Задача 2. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C, D. Докажите, что все эти точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, заданной уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

Решение: Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25. \end{cases} \qquad (1)$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и подставляя y^2 из первого, получим

$$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \\ = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}. \qquad (2)$$

Поскольку уравнение (2) получено как следствие системы (1), любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности, координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D.

Ответ: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Задача 3. Рассмотрим все рациональные числа между нулем и единицей, знаменатели которых не превосходят n. Расположим их в порядке возрастания. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – какие-то два соседних числа (дроби несократимы). Доказать, что $|bc - ad| = 1$.

В [14] представлено следующее **доказательство**: можно считать, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} \leq \frac{a+1}{d}$, которое выполняется при $a + 1 \leq b$, показывает, что $b \neq d$, т.е. знаменатели двух соседних дробей не могут быть одинаковыми. Докажем требуемое утверждение индукцией по n.

При $n = 3$ получим числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, для них утверждение легко проверяется. Предположим, что утверждение доказано для $n - 1$. При переходе от $n - 1$ к старому набору чисел добавляются некоторые числа вида $\frac{k}{n}$. Согласно сделанному выше замечанию два новых числа не могут быть соседними, поэтому

$$\frac{a}{b} < \frac{k}{n} < \frac{c}{d},$$

где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – соседние числа из старого списка.

Нужно доказать, что оба числа $A = kb - an$ и $B = cn - kd$ равны 1 (ясно, что эти числа положительны). Предположим, что одно из них больше 1.

Тогда $b + d < dB + dA = (bc - ad)n = n$, поскольку $bc - ad = 1$ по предположению индукции. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{b}$ показывает, что числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могут быть соседними.

Приходим к противоречию, доказывающему, что $|bc - ad| = 1$.

Выводы

Содержание олимпиадных задач соответствует логической структуре математической компетентности, а именно: компетентность, определенные умения, постановка задач на саморазвитие, следовательно, компетентностный подход реализуется при подготовке школьников к математическим олимпиадам. Так, процесс решения олимпиадных задач требует от учащихся сформированности ключевых и математических компетентностей третьего (креативного) уровня, поскольку специфика содержания таких задач проявляет все стадии познавательного процесса таксономии Блума. Оценивая олимпиадные работы, членам жюри важно соотнести содержание задач олимпиады с содержанием школьного образования, для этого необходимы критерии оценки олимпиадной деятельности учащегося. Считаем необходимым предварительное проведение методического инструктажа по проверке работ, способам решений и видам ошибок для членов жюри.

Список литературы

1. Концепция национального развития образования в Кыргызской Республике до 2020 года [Текст]: Постановление Правительства КР от 23.03.2012, № 201. – Бишкек, 2013. – 194 с.

2. Баранова И.В. Метасистема освоения предметной образовательной области как социокультурной ценности [Текст]: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Баранова И.В. – Санкт-Петербург, 2006. – 23 с.

3. Иванов С.Г., Черноус Т.Ф. Формирование общего образовательного пространства Российской Федерации, Кыргызской Республики и Республики Казахстан [Текст] / С.Г. Иванов, Т.Ф. Черноус // Человек и образование. – 2013. – № 2 (35). – С. 18–25.

4. Банников В.Н. Профессиональное становление будущего учителя изобразительного искусства [Текст]: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / В.Н. Банников. – Шуя, 2009. – 39 с.

5. Васильев Н.Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад [Текст] / Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

6. Агаханов Н.Х. Муниципальный этап XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области [Текст] / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский // Математика в школе. – 2016. – № 2. – С. 14–16.

7. Келдибекова А.О. Развитие математической компетентности учащихся через решение задач олимпиадного характера во время внеклассной работы по математике [Текст] / А.О. Келдибекова // Вест-

ник КГУ им. И. Арабаева. – 2016. – № 2 (2012). – С. 252–255.

8. Келдибекова А.О. Формирование математической компетентности школьников посредством олимпиадных задач [Текст] / А.О. Келдибекова. – Ош: Билим, 2017. – 250 с.

9. Задачная база Самарского государственного университета [Электронный ресурс]. – URL: http://www.ssu.samara.ru/~nauka/math/olimp/turgor/tgarhiv.zip (дата обращения: 25.10.2017).

10. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии [Текст]: учеб. пособие / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2007. – 640 с.

11. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады [Текст] / Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.

12. Задачная база: Московские соревнования, турнир имени Ломоносова, 1989 [Электронный ресурс]. – URL: http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=moskva.lomtur.1989&solution=1 (дата обращения: 25.10.2017).

13. Московские математические олимпиады 1993–2005 гг. [Текст] / Р.М. Федоров и др. под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

14. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу [Текст] / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2007. – 608 с.