УДК 373.5:372.853

УГЛУБЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О КЛАССИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ НА ШКОЛЬНЫХ УРОКАХ ФИЗИКИ

Шепель О.М.

ОГАПОУ «Томский музыкальный колледж имени Э.В. Денисова», Томск,
e-mail: omshepel@mail.ru

Для школьных уроков физики или естествознания при изучении классического закона всемирного тяготения И. Ньютона предлагаются задачи, требующие расчёта скоростей и времени столкновения двух масс, а также расстояний, преодолеваемых ими при этом. На конкретном примере гравитационного взаимодействия Луны и Земли при мгновенной остановке вращения спутника вокруг планеты показано, что для решения подобных задач не требуется математических знаний, выходящих за рамки школьной программы. Достаточно лишь предоставить в условии основные формулы, необходимые для соответствующих вычислений. При этом учащемуся необходимо лишь владеть умением извлекать квадратные корни, пользоваться дробными показателями степеней, составлять и решать системы двух уравнений с двумя неизвестными. Относительная громоздкость некоторых расчётов может потребовать также навыков использования современных калькуляторов. Вывод используемых формул требует более глубокого понимания математического аппарата дифференциального и интегрального исчислений, однако вполне приемлем в качестве задания для участников школьных олимпиад по физике. В частности, участник олимпиады должен продемонстрировать понимание соответствия физических величин математическим действиям; определять скорость как производную расстояния или интеграл ускорения, ускорение – как производную скорости, расстояние – интеграл скорости.

Ключевые слова: задача для школьного урока, задача для школьной олимпиады, гравитация, закон всемирного тяготения, скорость столкновения, время столкновения, расстояние до столкновения

DEEPENING IDIAS ABOUT THE CLASSICAL LAW OF UNIVERSAL GRAVITY IN SCHOOL PHYSICS LESSJNS

Shepel O.M.

Tomsk Musical College named after E.V. Denisov, Tomsk, e-mail: omshepel@mail.ru

This article proposes school tasks that require calculating the velocities and collision times of two masses, as well as the distances they overcome. These tasks can be used for school lessons in physics or natural science when studying the classical Newton's Law of Universal Gravity. Using a specific example of the gravitational interaction between the Moon and the Earth with an instant stop of the rotation of the satellite around the planet, it is shown that solving such tasks does not require mathematical knowledge that goes beyond the school curriculum. It is enough only to provide the basic formulas necessary for the corresponding calculations of the task. At this time, the student only needs to have the ability to extract square roots, use fractional indicators of degrees, compose and solve systems of two equations with two unknowns. The relative awkwardness of some calculations may also require the skills of using modern calculators. Formula construction requires a deeper understanding of the mathematical apparatus of differential and integral calculus, however, it is quite acceptable as a task for participants of school physics olympiads. In particular, the participant of the olympiad must demonstrate an understanding of the correspondence of physical quantities to mathematical actions; define velocity as a derivative of distance or an integral of acceleration, acceleration as a derivative of velocity, distance as an integral of velocity.

Keywords: task for school lesson, task for school olympiad, gravity, Law of universal gravity, speed of collision, time of collision, distance to collision

Изучение классического закона всемирного тяготения в рамках школьной программы, как правило, ограничивается ознакомлением с математической записью этого закона [1–3],

$$F = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2},$$

и объяснением причины отсутствия столкновения космических тел их вращением (рис. 1) вокруг друг друга [4, с. 18], которое подчиняется формуле

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

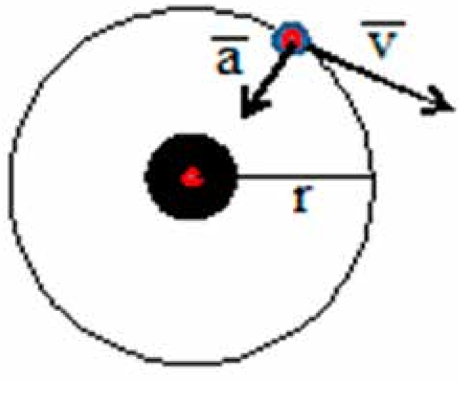

Рис. 1. Схема вращения космического тела вокруг источника гравитационного поля

Например, Луна вращается вокруг Земли, Земля вокруг Солнца, Солнце вокруг центра Галактики. Проблемы тёмной энергии и тёмной материи обычно подробно не обсуждают. Между тем возникают естественные вопросы: «А если мгновенно остановить вращение, например, Луны вокруг Земли, то через какое время они столкнутся и с какой скоростью? Какие расстояния преодолеют перед столкновением?» Авторы учебников избегают в своих книгах ответы на эти вопросы в силу кажущейся сложности выражений, необходимых для соответствующих расчётов.

Целью настоящей работы является проверка возможности обучения учащихся самостоятельно рассчитывать ответы на подобные вопросы, используя математику исключительно в объёме школьной программы [5–7].

Материалы и методы исследования

В качестве методов исследования применяли анализ процесса сближения двух масс под действием сил гравитации и комбинирование математических действий и операций, предусмотренных общеобразовательными стандартами [7].

Результаты исследования и их обсуждение

Считается, что вычисление скоростей столкновения двух масс под действием сил гравитации, расстояния, преодолеваемого ими при этом, а также времени сближения двух масс слишком сложно для учащихся общеобразовательных школ. На первый взгляд, действительно, точное время t столкновения должно вычисляться по формуле:

$$t = \frac{\left|\sqrt{S}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right| \cdot (R_1+R_2) + S^{3/2} \cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|},$$

где R_1 и R_2 – радиусы сталкивающихся масс M_1 и M_2 соответственно, S – первоначальное расстояние между их центрами, γ – гравитационная постоянная. Скорость столкновения требует следующих расчётов:

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = -\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{S}}\right|,$$

где υ_1, υ_2 – противоположно направленные скорости столкновения масс M_1 и M_2.

При этом подразумевается, что $\upsilon_1 < 0$; $\upsilon_2 > 0$ и $M_1 \cdot \upsilon_1 + M_2 \cdot \upsilon_2 = 0$, а расстояния S_1 и S_2, преодолеваемые массами M_1 и M_2 до столкновения, находятся из соотношения

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Однако отметим, что все эти вычисления не требуют от учащихся знаний, превышающих школьную программу. Учащемуся необходимо лишь владеть умением извлекать квадратные корни, пользоваться дробными показателями степеней, составлять и решать системы двух уравнений с двумя неизвестными. Относительная громоздкость некоторых расчётов может потребовать также навыков использования современных калькуляторов. Рассмотрим конкретный пример.

Задача

При мгновенной остановке вращения Луны вокруг Земли эти два космических тела столкнутся под действием силы тяготения. Через какое время t это столкновение произойдёт? С какими скоростями υ_1 и υ_2 соответственно эти космические тела встретятся? Какой путь к Земле (S_1) преодолеет до столкновения Луна и какой путь к Луне (S_2) преодолеет Земля? Учесть, что расстояние S между центрами Луны и Земли 384 467 км, масса (M_1) Луны $7{,}35\cdot10^{22}$ кг, масса (M_2) Земли $6{,}0\cdot10^{24}$ кг, радиус Луны (R_1) 1378 км, средний радиус Земли (R_2) 6371 км, гравитационная постоянная $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. При решении можно воспользоваться формулами

$$t=\frac{\left|\sqrt{S}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|\cdot(R_1+R_2)+S^{3/2}\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|}$$

$$\upsilon_1-\upsilon_2=-\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{S}}\right|$$

$$M_1\cdot\upsilon_1+M_2\cdot\upsilon_2=0$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{M_2}{M_1}$$

Дано:

$S = 384\ 467\cdot10^3$ м
$M_1 = 7{,}35\cdot10^{22}$ кг
$R_1 = 1\ 378$ км
$R_2 = 6\ 371$ км.
$M_2 = 6{,}0\cdot10^{24}$ кг
$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2

$t = ?$
$\upsilon_1 = ?$
$\upsilon_2 = ?$
$S_1 = ?$
$S_2 = ?$

Решение:

$$t=\frac{\left|\sqrt{S}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|\cdot(R_1+R_2)+S^{3/2}\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|}$$

Для нахождения величин υ_1 и υ_2 необходимо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\upsilon_1-\upsilon_2=-\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{S}}\right|$$

$$M_1\cdot\upsilon_1+M_2\cdot\upsilon_2=0$$

В результате этого решения получится

$$\upsilon_1=-\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{S}}\right|$$

$$\upsilon_2=\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{S}}\right|$$

Для расчёта величин S_1 и S_2 также необходимо воспользоваться системой двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}\frac{S_1}{S_2}=\frac{M_2}{M_1}\\ S_1+S_2=S-(R_1+R_2)\end{cases}$$

Следовательно,

$$S_1=\frac{M_2\cdot(S-R_1-R_2)}{(M_1+M_2)}$$

$$S_2=\frac{M_1\cdot(S-R_1-R_2)}{(M_1+M_2)}$$

Вычисление:

$$t=\frac{\left|\sqrt{384\,467\cdot10^3}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{384\,467}{7\,749}-1}\right|\cdot7\,749\cdot10^3+\left|\sqrt{\left(384\,467\cdot10^3\right)^3}\right|\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{384\,467}{7\,749}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(7{,}35\cdot10^{22}+600\cdot10^{22})}\right|}\approx$$

$$\approx 415404\,(\text{с})\equiv 6923{,}4\,(\text{мин.})\equiv 115{,}39\,(\text{ч.})\equiv 4{,}8\,(\text{суток})$$

$$\upsilon_1=-\left(\frac{6{,}0\cdot10^{24}}{607{,}35\cdot10^{22}}\right)\cdot\left|\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot607{,}35\cdot10^{22}}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{7\,749\cdot10^3}-\frac{1}{384\,467\cdot10^3}}\right|\approx$$

$$\approx-1{,}0\cdot10^4\,(\text{м/с})\equiv-3{,}6\cdot10^4\,(\text{км/ч})$$

$$\upsilon_2=\left(\frac{7{,}35\cdot10^{22}}{607{,}35\cdot10^{22}}\right)\cdot\left|\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot607{,}35\cdot10^{22}}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{1}{(1\,378+6\,371)\cdot10^3}-\frac{1}{384\,467\cdot10^3}}\right|\approx$$

$$\approx 0{,}012\cdot10^4\,(\text{м/с})\equiv 0{,}043\cdot10^4\,(\text{км/ч})$$

$$S_1=\frac{6{,}0\cdot10^{24}\cdot(384\,467\cdot10^3-1378\cdot10^3-6\,371\cdot10^3)}{(7{,}35\cdot10^{22}+600\cdot10^{22})}\approx 372{,}163\cdot10^6\,(\text{м})$$

$$S_2=\frac{7{,}35\cdot10^{22}\cdot(384\,467\cdot10^3-1378\cdot10^3-6\,371\cdot10^3)}{(7{,}35\cdot10^{22}+600\cdot10^{22})}\approx 4{,}559\cdot10^6\,(\text{м})$$

Ответ: $t\approx415\,404$ с; $\upsilon_1\approx-1{,}0\cdot10^4$ $м/с$; $\upsilon_2\approx0{,}012\cdot10^4$ $м/с$;

$S_1\approx372{,}163\cdot10^6$ (м); $S_2\approx4{,}559\cdot10^6$ (м).

Большого объёма предложенной задачи легко избежать преподавателям и авторам учебных пособий, разбив её на три:

– задачу о нахождении времени столкновения;

– задачу на расчёт скоростей столкновения заданных масс;

– задачу на вычисление расстояний, преодолеваемых сталкивающимися массами.

Заметим, что эта же самая или аналогичная задача может быть поднята до уровня олимпиадной простым устранением из условия готовых формул. В этом случае участнику олимпиады придётся эти формулы выводить, что опять-таки не потребует от него знаний математики, превышающих школьную программу, однако понадобится более глубокое понимание математического аппарата дифференциального и интегрального исчислений. В частности, участник олимпиады должен продемонстрировать понимание соответствия физических величин математическим действиям, а именно: определять скорость как производную расстояния или интеграл ускорения, ускорение – как производную скорости, расстояние – интеграл скорости.

Рассмотрим один из вариантов вывода формул, приведённых в условии рассмотренной задачи.

Проведём ось OX через Землю и Луну, не вращающуюся вокруг планеты, обозначив x_1 – положение Луны, x_2 – положение Земли (рис. 2).

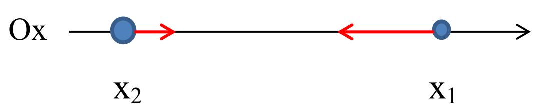

Рис. 2. Схема взаиморасположения Луны и Земли, сталкивающихся вследствие мгновенной остановки вращения спутника вокруг планеты

Обозначим также $a_1 = x_1''$ – ускорение Луны, $a_2 = x_2''$ – ускорение Земли, M_1 – масса Луны, M_2 – масса Земли.

Из рисунка видно, что

$$a_2 = \gamma \frac{M_1}{\left(x_1 - x_2\right)^2}$$

$$a_1 = -\gamma \frac{M_2}{\left(x_1 - x_2\right)^2},$$

где γ – гравитационная постоянная. Следовательно,

$$a_1 - a_2 = -\gamma \frac{(M_1 + M_2)}{\left(x_1 - x_2\right)^2}.$$

Вводя обозначения

$$x_1 - x_2 = r;$$

$$\gamma \cdot (M_1 + M_2) = K, \qquad (1)$$

сможем записать

$$r'' = -\frac{K}{r^2}. \qquad (2)$$

Если обозначить

$$r' = \frac{dr}{dt} = x_1' - x_2' = \upsilon, \qquad (3)$$

то из условия задачи вытекает, что

$$r(0) = S;$$

$$r'(0) = x_1'(0) - x_2'(0) = \upsilon(0) = 0 \text{ (м/с)}.$$

Поскольку величина r зависит от времени t, то

$$r' = \upsilon\big(r(t)\big).$$

То есть для того, чтобы выразить величину r'' из последнего равенства, необходимо взять производную сложной функции:

$$r'' = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = r' \cdot \frac{d\upsilon}{dr} = \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dr}. \qquad (4)$$

При $t = 0$

$$r'(0) = 0 = \upsilon\big(r(0)\big) = \upsilon(S)$$

То есть $\upsilon(S) = 0$, что вполне соответствует здравому смыслу.

Сопоставляя (2) и (4), можем записать

$$\upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{K}{r^2}$$

или (после разделения переменных)

$$\upsilon \cdot d\upsilon = -\frac{K}{r^2} \cdot dr.$$

Проинтегрируем полученное равенство до момента столкновения

$$\int_0^{\upsilon_1 - \upsilon_2} \upsilon \cdot d\upsilon = -K \int_S^{R_1 + R_2} r^{-2} \cdot dr,$$

$$\frac{1}{2}\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right)^2 = \frac{K}{R_1 + R_2} - \frac{K}{S},$$

Подставив вместо K его значение из (1), получим

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = -\left|\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot (M_1 + M_2)}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{S}}\right|. \qquad (5)$$

Для нахождения отдельно υ_1 и υ_2 необходимо ещё одно уравнение, включающее эти две величины. Выведем его, пользуясь равенством:

$$M_1 \cdot a_1 = -M_2 \cdot a_2$$

или

$$M_1 \cdot \frac{d\upsilon_1}{dt} = -M_2 \cdot \frac{d\upsilon_2}{dt}$$

$$M_1 \cdot d\upsilon_1 = -M_2 \cdot d\upsilon_2$$

$$\int_0^{\upsilon_1} M_1 \cdot d\upsilon_1 = \int_0^{\upsilon_2} -M_2 \cdot d\upsilon_2$$

$$M_1 \cdot \upsilon_1 + M_2 \cdot \upsilon_2 = 0$$

С учётом формулы (5) получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными для расчёта υ_1 и υ_2.

$$\begin{cases} \upsilon_1 - \upsilon_2 = -\left|\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot (M_1 + M_2)}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{S}}\right| \\ M_1 \cdot \upsilon_1 + M_2 \cdot \upsilon_2 = 0 \end{cases}$$

Для расчёта времени столкновения t воспользуемся обозначениями (1) и (3) и представим (5) в виде равенства, справедливого на протяжении всего движения Луны и Земли навстречу друг другу.

$$\frac{dr}{dt} = -\left|\sqrt{2 \cdot K}\right| \cdot \left|\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{S}}\right|$$

или

$$\frac{dr}{\left|\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{S}}\right|} = -\left|\sqrt{2 \cdot K}\right| \cdot dt$$

Проинтегрировав полученное равенство до момента столкновения t, при котором $r = R_1 + R_2$

$$\int_{S}^{r} \frac{dr}{\left|\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{S}}\right|} = -\left|\sqrt{2\cdot K}\right|\int_{0}^{t} dt,$$

получим

$$-\left|\sqrt{S}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{S}{r}-1}\right|\cdot r - S^{3/2}\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{r}-1}\right| = -\left|\sqrt{2\cdot K}\right|\cdot t .$$

Следовательно,

$$t = \frac{\left|\sqrt{S}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{S}{r}-1}\right|\cdot r + S^{3/2}\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{r}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot K}\right|}$$

или

$$t = \frac{\left|\sqrt{S}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|\cdot(R_1+R_2) + S^{3/2}\cdot arctg\left|\sqrt{\frac{S}{R_1+R_2}-1}\right|}{\left|\sqrt{2\cdot\gamma\cdot(M_1+M_2)}\right|}.$$

Для нахождения расстояний, преодолеваемых Луной (S_1) и Землей (S_2) перед столкновением, исходим из неизменности положения центра масс в течение всего процесса сближения космических объектов. В данном случае положение этого центра определяется выражением

$$\frac{M_1\cdot S_1 + M_2\cdot S_2}{M_1+M_2}.$$

Если в момент остановки вращения Луны за начало оси ОХ принять положение Земли, то

$$\frac{M_2\cdot S}{M_1+M_2} = S_1.$$

Если в этот момент за начало оси принять положение Луны, то

$$\frac{M_1\cdot S}{M_1+M_2} = S_2.$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Заключение

Задачи по расчёту:

− скоростей тел, сталкивающихся под действием сил гравитационного притяжения;

− времени, требующегося для их сближения;

− расстояния, преодолеваемого при этом телами, –

могут быть сформулированы для любой пары масс и предложены старшеклассникам на уроках физики или естествознания при условии указания основных формул, необходимых для решения, а также участникам школьных олимпиад по физике, которые должны будут выводить эти формулы самостоятельно.

Список литературы

1. Иванов А.И., Гутник Е.М., Петрова М.А., Пёрышкин И.М. Физика. Учебник. 9 класс. М.: Просвещение, 2022. 352 с.

2. Генденштейн Л.Э., Кошкина А.В., Булатова А.А., Корнильев И.Н. Физика. Учебник. 10 класс. М.: Просвещение / Бином, 2017. 256 с.

3. Касьянов В.А. Физика. Учебник. 11 класс. М.: Дрофа, 2020. 409 с.

4. Шепель, О.М. Естествознание постнеклассической науки: учебное пособие. М.: Издательский дом «Академия естествознания», 2018. 224 с.

5. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Номировский Д.А., Якир М.С. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Дрофа, 2019. 281 с.

6. Шепель О.М., Заводенко Е.В. Математика и информатика: учебное пособие. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. 236 с.

7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего образования. Утверждён приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413. С изменениями и дополнениями от 11 декабря 2020 г. С. 15–16.