

## СТАТЬИ

УДК 371:372.8

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ**

**Исакова М.М., Эржибова Ф.А.**

*ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова»,  
Нальчик, e-mail: isakova2206@mail.ru*

Неравенства играют ключевую роль в различных областях современной математики. Без них невозможно представить себе ни физику, ни математическую статистику, ни экономику. Несмотря на широкое использование неравенств, до сих пор не существует единой и хорошо разработанной теории, которая могла бы охватить все их разновидности. В ходе подготовки статьи был проведен тщательный анализ научно-методической литературы, посвященной классическим неравенствам. Цель работы – изучение нестандартных методов решения неравенств, базирующихся на использовании неравенств Коши и Бернулли. В статье также рассматриваются некоторые особенности применения этих методов в решении неравенств; приведены примеры, которые демонстрируют, что рассмотренные методы не требуют специальной подготовки и особых навыков. Представленные примеры с полными решениями призваны способствовать формированию у учащихся положительной мотивации, развитию самостоятельного мышления и освоению навыков, необходимых для успешного изучения математики. Применение классических численных неравенств является нестандартным подходом к решению задач повышенной сложности, которые встречаются во многих олимпиадных заданиях. Умение решать задачи такого уровня требует глубокого понимания, владения и применения множества математических методов и приемов, которые выходят за рамки базовых знаний. Проблема, которая затронута авторами в работе, актуальна для выпускников школ, может быть использована при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике профильного уровня. Владение нестандартными способами решения задач позволяет значительно сократить время, необходимое для выполнения задания. Для целого ряда задач применение классических неравенств Коши и Бернулли позволяет с помощью несложных выкладок получить достаточно простые и доступные решения.

**Ключевые слова:** неравенство, иррациональное неравенство, особенность, метод, решение неравенств

**APPLICATION OF NON-STANDARD METHODS  
FOR SOLVING INEQUALITIES**

**Isakova M.M., Erzhibova F.A.**

*Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov,  
Nalchik, e-mail: isakova2206@mail.ru*

Inequalities play a key role in various areas of modern mathematics. It is impossible to imagine physics, mathematical statistics, or economics without them. Despite the widespread use of inequalities, there is still no single and well-developed theory that could cover all their varieties. In the course of preparing the article, a thorough analysis of scientific and methodological literature devoted to classical inequalities was carried out. The purpose of the work is to study non-standard methods for solving inequalities based on the use of Cauchy and Bernoulli inequalities. The article also discusses some features of the application of these methods in solving inequalities; examples are given that clearly demonstrate that the methods considered do not require special training and special skills. The presented examples with complete solutions are intended to contribute to the formation of positive motivation in students, the development of independent thinking and the acquisition of skills necessary for the successful study of mathematics. The use of classical numerical inequalities is a non-standard approach to solving problems of increased complexity, which are found in many Olympiad tasks. The ability to solve problems of this level requires a deep understanding, mastery and application of many mathematical methods and techniques that go beyond basic knowledge. The problem that the authors touch upon in their work is relevant for school graduates and can be used in preparation for Olympiads and the Unified State Exam in mathematics at a specialized level. Mastery of non-standard methods for solving problems allows you to significantly reduce the time required to complete the task. For a number of problems, the use of classical Cauchy and Bernoulli inequalities allows you to obtain fairly simple and accessible solutions using simple calculations.

**Keywords:** inequality, irrational inequality, feature, method, solution of inequalities

**Введение**

В современном обществе математика играет все более важную роль. Ее применение в различных сферах жизни помогает лучше понимать и объяснять происходящие процессы. Помимо общей грамотности необходима также элементарная математиче-

ская грамотность. Учащиеся должны уметь использовать как традиционные, так и инновационные методы. Д. Пойа отмечал, что поиск правильного решения задачи – это творческий процесс, который можно сравнить с искусством [1, с. 15]. Умение применять как классические подходы, так и нестандарт-

ные способы решения задач поможет учащимся в их дальнейшей научно-исследовательской работе.

Неравенства играют ключевую роль в различных областях современной математики. Без них невозможно представить себе ни физику, ни математическую статистику, ни экономику. Несмотря на широкое использование неравенств, до сих пор не существует единой и хорошо разработанной теории, которая могла бы охватить все их разновидности. Однако для некоторых классов неравенств такая теория уже была создана. Неравенства можно встретить как в классических, так и в самых современных разделах математики.

Исследование неравенств является самым сложным разделом программного курса математики. Умение решать неравенства обязательно учитывается при итоговой аттестации учащихся [2, с. 204]. Традиционно неравенства вызывают у учащихся наибольшие трудности. Они не только не понимают логику их исследования, но и затрудняются в выборе метода решения. В отличие от уравнений, в неравенствах невозможно проверить найденные решения. Поэтому стандартная схема решения уравнений, которая предполагает получение последовательности уравнений-следствий и отбор корней, не подходит для решения неравенств. Однако многие приемы и методы, используемые для решения неравенств, схожи с теми, что используются для уравнений.

Особую трудность представляют собой иррациональные неравенства. Ученик, видя в тексте задания корень любой степени, начинает испытывать страх от неумения или незнания использования свойств радикалов. Изучение неравенств открывает множество возможностей для формирования и развития математической культуры, позволяет использовать разнообразные педагогические методы для развития логического мышления. Практическое применение теоретических знаний напрямую зависит от уровня их усвоения [3, с. 107].

Классические методы требуют больших вычислений, поэтому в некоторых случаях более эффективным решением может быть использование нестандартных подходов к неравенствам, которые часто встречаются в олимпиадных задачах для школьников, а также во второй части КИМ ЕГЭ. Для успешной сдачи ЕГЭ очень важно правильно распределять время, поэтому требуются новые методы решения, обеспечивающие наиболее быстрое выполнение заданий. Чтобы использовать эти методы, нужно хорошо разбираться в таких понятиях, как функция и ее свойства, среднее

арифметическое и геометрическое, а также быть знакомым с некоторыми тождествами.

Нестандартные методы, основанные на использовании известных численных неравенств, часто остаются в тени. Однако они могут быть очень эффективны при решении многих математических задач, особенно повышенной сложности. Поэтому незнание их может значительно ограничить количество успешно решаемых задач. Выполнение разнообразных заданий поможет развить логическое мышление и получить опыт работы с задачами повышенной сложности, выходящими за рамки обязательного уровня. Тогда основу подготовки школьников составит обучение предварительному анализу задачи [4, с. 282]. Это, в свою очередь, способствует формированию навыков познавательной активности, повышению математической культуры и расширению кругозора учащихся. Оптимизация поиска методов решения задач позволит учащимся достичь более высокого уровня подготовки к ЕГЭ.

**Цель исследования** – изучить нестандартные методы решения неравенств, базирующихся на использовании неравенств Коши и Бернулли.

### Материалы и методы исследования

При подготовке статьи был проведен тщательный анализ научно-методической литературы, посвященной классическим неравенствам. Изучены нестандартные методы решения неравенств, базирующихся на использовании неравенств Коши и Бернулли. Приведены примеры, которые наглядно демонстрируют, что рассмотренные методы не требуют специальной подготовки и особых навыков. Они предполагают наличие умения обобщать и анализировать, а их использование значительно сокращает время и упрощает решение задач. Данным неравенствам в последние годы уделяется весьма существенный интерес. Однако их применение требует особого внимания, чтобы избежать возможных ошибок. Поэтому одной из задач учащихся является освоение нестандартных методов решения неравенств. Важно мотивировать учеников тем, что они смогут более уверенно и точно решать задачи с неравенствами на олимпиадах и получать больше баллов на ЕГЭ.

### Результаты исследования и их обсуждение

В школьном курсе математики изучаются различные виды неравенств. Для их решения существует множество методов, среди которых особенно выделяются метод интервалов, метод замены переменной, метод

рационализации и метод оценки. Суть метода рационализации при решении неравенств заключается в замене сложного выражения  $f(x)$  на более простое  $\phi(x)$ . При этом новое выражение  $f(x) < 0$  должно быть равносильно  $\phi(x) < 0$  в области определения  $f(x)$ . Чтобы использовать метод оценки для решения неравенств, необходимо, чтобы в неравенстве присутствовали функции разных типов, а также была возможность оценить одну часть неравенства. Чтобы эффективно применять эти методы, необходимо обладать определенными навыками и знаниями, которые позволяют нам выстраивать логические цепочки рассуждений.

Отметим, что в рамках данной работы под термином «нестандартные методы» подразумеваются те, которые в настоящее время не являются широко распространенными в школьной литературе и не используются в школьной практике. Эти методы позволяют найти ответ быстрее, чем традиционные.

При изучении неравенств (в частности, иррациональных) и поиске их решений часто применяют неравенство Коши:  $A \geq C$ , где  $A$  – среднее арифметическое,  $C$  – среднее геометрическое неотрицательных величин. Это позволяет значительно упростить процесс решения. В общем случае можно перейти как к среднему арифметическому, так и к среднему геометрическому. Известное неравенство Коши

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n},$$

которое справедливо для неотрицательных значений  $a_1, \dots, a_n$ , будем использовать в записи:

$$a_1 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Его часто используют для решения уравнений, доказательства неравенств и систем методом оценок. Задания с его применением

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{z}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x}} &= \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \geq \\ &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}} \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x}}} = 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x \cdot y \cdot z}{y \cdot z \cdot x}} = 6 \end{aligned}$$

Отметим, что доказанное неравенство можно обобщить на случай, когда его левая часть содержит  $n$  слагаемых. В такой ситуации имеет место

$$\frac{x_1}{x_2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} + \dots + n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_1}} \geq \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \text{ где } n \geq 1.$$

При значениях  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$  в этом неравенстве достигается равенство.

встречаются в олимпиадах и на ЕГЭ; редко олимпиада обходится без задач, где требуется доказать определенное неравенство.

При доказательстве неравенств можно использовать различные методы и приемы. Иногда для получения нужного результата достаточно обратиться к определению неравенства, то есть рассмотреть разницу между левой и правой его частями. Также полезно использовать уже известные неравенства или оценивать обе части доказываемого неравенства. В некоторых случаях удается доказать неравенство, сведя его с помощью равносильных преобразований к очевидному (верному) неравенству.

Рассмотрим примеры, которые демонстрируют применение неравенства Коши.

*Пример 1.* Доказать, что

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}, \text{ если } ab = 1 \text{ и } a - b > 0.$$

*Доказательство.* После выделения полного квадрата и выполнения ряда преобразований в левой части неравенства, учитывая условия  $ab = 1$ ,  $a - b > 0$ , получим

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b} = a - b + \frac{2}{a - b}.$$

Применив неравенство Коши для значения  $n = 2$ , получим

$$a - b + \frac{2}{a - b} \geq 2 \cdot \sqrt{(a - b) \cdot \frac{2}{a - b}} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, неравенство доказано.

*Пример 2.* Доказать неравенство

$$\frac{x}{y} + 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{z}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \geq 6,$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $z > 0$ .

*Решение.* Применим неравенство Коши для значения  $n = 6$ . Тогда получим

*Пример 3.* Решите неравенство

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} \leq 2011.$$

*Решение.* Представив второе слагаемое левой части неравенства как сумму 2010 дробей  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , получим сумму из 2011 слагаемых. Полученную сумму, согласно неравенству Коши, заменим средним геометрическим:

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} = x^{1005} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2011 \cdot 2011 \sqrt{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdots \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

В итоге приходим к следующему равносильному неравенству:

$$2011 \cdot 2011 \sqrt{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdots \frac{1}{\sqrt{x}}} \leq x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} \leq 2011, \Rightarrow$$

$$2011 \cdot 2011 \sqrt{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdots \frac{1}{\sqrt{x}}} \leq 2011, \Rightarrow$$

$$2011 \cdot 2011 \sqrt{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdots \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2011, \Rightarrow 2011 \cdot \sqrt[2011]{1} = 2011.$$

Поскольку равенство среднего арифметического и среднего геометрического возможно только в случае, когда входящие в них элементы равны, то  $x^{1005} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\Rightarrow x = 1$ .

Это решение является единственным, поскольку во всех других случаях, кроме  $x = 1$ , левая часть исходного неравенства будет больше правой.

*Ответ.*  $x = 1$ .

В инженерных задачах часто возникает необходимость сравнивать алгебраические выражения. Мощным инструментом, позволяющим находить оптимальные решения для таких задач, является использование неравенства Бернулли:  $\left| k + \frac{1}{k} \right| \geq 2$ .

*Пример 4.* Сравните значения

$$2 \text{ и } \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_7 2}.$$

*Решение.* По свойству логарифма, учитывая, что  $\log_2 7 > 2$ , получим

$$\frac{1}{\log_2 7} + \log_2 7.$$

Тогда согласно неравенству Бернулли:

$$\log_2 7 + \frac{1}{\log_2 7} > 2, \text{ то есть } \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_7 2} > 2.$$

$$\text{Ответ. } 2 < \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_7 2}.$$

*Пример 5.* Проверьте, выполняется ли неравенство:

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

*Решение.* Преобразуя левую часть неравенства, получим

$$\sqrt[3]{3} \cdot \left( \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} \right) < 2\sqrt[3]{3}.$$

Разделив на  $\sqrt[3]{3}$  обе части неравенства, имеем  $\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$ .

Теперь применим неравенство Бернулли к левой части:

$$\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = 2.$$

Таким образом, исходное неравенство становится очевидным и выполняется.

Помимо «классического» неравенства Бернулли существует и менее известная формулировка этого математического соотношения:

$$(1+x)^p \geq 1+px, \text{ если } p < 0 \text{ или } p > 1;$$

$$(1+x)^p \leq 1+px, \text{ если } 0 < p < 1.$$

Проиллюстрируем на примерах.

*Пример 6.* Сравните числа

$$\sqrt[200]{2} \text{ и } 1,006.$$

*Решение.* Возводя обе части формально-го неравенства  $\sqrt[200]{2} \vee 1,006$  в 200 степень, получим:  $2 \vee 1,006^{200}$ .

Используя неравенство Бернулли, оце-ним правую часть:

$$(1+1,006)^{200} \geq 1 + 200 \cdot 0,006 = 2,2.$$

То есть  $1,006^{200} \geq 2,2 > 2$ .

Отсюда  $\sqrt[200]{2} < 1,006$ .

*Ответ.*  $\sqrt[200]{2} < 1,006$ .

Применяя неравенство Бернулли к правой части равносильного неравенства, получим

$$\left(1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} + 1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} = 2.$$

Из этого вытекает неравенство  $x \leq \left(1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Получим  $x \leq 2$ .

Таким образом, неравенство справедли-во на всей ОДЗ, то есть решением данного неравенства являются  $-2 \leq x \leq 2$ .

Неравенство Бернулли также может быть использовано при решении уравне-ний, доказательстве тригонометрических неравенств и нахождении наибольшего зна-чения функции.

Исследование показало, что для решения сложных задач не всегда возможно исполь-зовать стандартные методы. Поэтому важно уметь применять и нестандартные. Присту-пая к выполнению задания (после проведен-ных занятий), подавляющее большинство учащихся, нашедших путь решения, верно доводит его до конца, что указывает на рост математической культуры. Практическое ре-шение неравенств нестандартными метода-ми способствует развитию интуиции и улуч-шению логического мышления.

### Заключение

Владение нестандартными способами ре-решения задач позволяет значительно со-кратить время, необходимое для выполне-

*Пример 7.* Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2}} \geq x.$$

*Решение.* ОДЗ в неравенстве являют-ся  $-2 \leq x \leq 2$ . Так как неравенство выполняет-ся при  $x = 0$ , то рассмотрим случай  $0 < |x| \leq 2$ .

Преобразуем неравенство в более удоб-ную для сравнения форму:

$$x \leq \left(1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если  $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} < 1$ , то  $0 < |x| \leq 2$ .

ния задания. В некоторых случаях это мо-жет быть единственным верным решением, что особенно важно при подготовке к ЕГЭ.

Таким образом, для целого ряда задач применение классических неравенств Коши и Бернулли позволяет с помощью неслож-ных выкладок получить достаточно про-стые и доступные решения.

### Список литературы

- Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей / Пер. с англ. В.Г. Звонаревой и Д.Н. Белла; под ред. Ю.М. Гай-дука. М.: УчПедГиз, 1959. 208 с.
- Батуева К.С., Закирова Н.М. Иррациональные урав-нения и неравенства в школьном курсе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19 (316). С. 204–209.
- Жафяров А.Ж. Методология и технология внедрения компетентного подхода в математическом образовании // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. 2016. № 3. С. 105–115.
- Агаханов Н.Х., Марчукова О.Г., Подлипский О.К. О современных тенденциях в подготовке школьников к математическим олимпиадам // Вопросы образования. 2021. № 4. С. 266–284. DOI: 10.17323/1814-9545-2021-4-266-284.
- Ерина Т.М. Математика. Профильный уровень, прак-тическое руководство. М.: УчПедГиз, 2018. 352 с.